Correction du devoir TES Exponentielles

Exercice 1

1. $u_1=\frac{1}{2}u_0+3=\frac{1}{2}\times 1+3=3,5$ et

$u_2=\frac{1}{2}u_1+3=\frac{1}{2}\times 3,5+3=4,75$.

2.a. $v_0=u_0-6=1-6=-5$ et $v_1=u_1-6=3,5-6=-2,5$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{1}{2}u_n+3-6=\frac{1}{2}u_n-3$.

Or $\frac{1}{2}v_n=\frac{1}{2}(u_n-6)=\frac{1}{2}u_n-3$ donc $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$, qui est vrai quel que soit n entier naturel donc v est une suite géométrique de raison q=0,5 et de premier terme −5.

c. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times q^n=-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d. Comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n-6$, $u_n=v_n+6=-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$.

Exercice 2

$A=\frac{q^2\times q^3}{q}=\frac{q^5}{q^1}=q^{5-1}=q^4$

$B=\left(\frac{1}{q}\right)^2\times\left(q^2\right)^3=q^{-2}\times q^{2\times 3}=q^{-2+6}=q^4$

$C=\frac{\left(q^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(q^3\right)^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{6}}}=q^{-\frac{2}{3}}\times q^{\frac{3}{2}}\times q^{-\frac{1}{6}}=q^{-\frac{4}{6}+\frac{9}{6}-\frac{1}{6}}=q^{\frac{4}{6}}=q^{\frac{2}{3}}$

Exercice 3

Il s'agit de l'exercice 49 p. 66 du manuel.

1) $f'(x)=2\times 3x^2-6=6x^2-6=6(x^2-1)=6(x+1)(x-1)$.

On sait que $f'(x)\leqslant 0$ ssi $-1\leqslant x\leqslant 1$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$, strictement décroissante sur $[-1;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

2) Sur $[-1;1]$, f est continue et strictement décroissante. Par ailleurs, $f(-1)=2\times(-1)^3-6\times(-1)+1=5>0$ et $f(1)=2-6+1=-3<0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ a une seule solution sur cet intervalle, nommons-la β.

3)a) $f(-2)=-3<0$, choisissons $a=-2$.

b) De même que ci-dessus, f est strictement croissante sur $[-2;-1]$ où f change de signe donc l'équation a une seule solution α sur $[-2;-1]$.

Comme f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$, si $x\leqslant -2, f(x)\leqslant f(-2)<0$ donc l'équation n'a pas de solution sur $]-\infty;-2]$ et la seule solution sur $]-\infty;-1]$ est α.

4) De même sur $[1;2]$ où f change de signe et γ est la seule solution sur $[1;+\infty[$ où f est strictement croissante.

5) $-1,9\leqslant\alpha\leqslant -1,8$, $0,1\leqslant\beta\leqslant 0,2$ et $1,6\leqslant\gamma\leqslant 1,7$.

Donc $2x^3-6x+1\geqslant 0$ ssi $x\in[\alpha;\beta]\cup[\gamma;+\infty[$.

Bonus

$4^{15}+8^{10}=(2^2)^{15}+(2^3)^{10}=2^{30}+2^{30}=2\times 2^{30}=2^{31}$ donc x=31.