

Correction du devoir TES spécialité n°2

Exercice 1

Partie A

Le graphe donné dans le texte représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage.

1. Le nombre total de voies de circulation est 13.
2. Vouloir parcourir le graphe en passant une fois et une seule par chaque arête, c'est déterminer un cycle eulérien (on part d'un sommet et on arrive au même sommet) ou une chaîne eulérienne (on part d'un sommet et on arrive à un autre).

D'après le théorème d'Euler :

Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degrés pairs,

Un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il est connexe et tous ses sommets sont de degrés pairs, sauf deux ; la chaîne eulérienne part alors d'un des deux sommets de degré impair pour aboutir à l'autre.

Le graphe est connexe car deux sommets quelconques du graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de celle-ci :

$A - B - C - D - E - F - T$

Déterminons les degrés de tous les sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	T
Degré	3	4	4	4	4	4	3

Ce graphe possède donc une chaîne eulérienne partant de A pour arriver à T (ou le contraire).

Exemple d'un tel parcours : $A - B - C - A - T - F - C - D - B - E - D - F - E - T$

Partie B

On oriente et on pondère le graphe précédent.

1. a. La matrice M associée au graphe orienté proposé dans le texte est une matrice carrée d'ordre 7 (le nombre de sommets).

On mettra à la ligne i et la colonne j , le nombre d'arcs allant du sommet i vers le sommet j , en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b. Le sommet A est le sommet numéro 1 et le sommet T est le sommet numéro 7. Le nombre de trajets de longueur 3 reliant A à T est le nombre situé dans la matrice M^3 à la ligne 1 (sommet A) et la colonne 7 (sommet T). À la calculatrice, on trouve que ce nombre est 2 ; il y a donc deux trajets de longueur 3 reliant A à T : $A - B - E - T$ et $A - C - F - T$.

2. L'avion se trouve en A et doit se rendre le plus rapidement possible au point T.

On va utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer l'itinéraire le plus rapide.

Cet algorithme va donner tous les itinéraires les plus rapides partant de A.

A	B	C	D	E	F	T	choix
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	4 A	3 A	∞	∞	∞	∞	C
	4 A		5 C	∞	6 C	∞	B
			4,5 B	5 B	6 C	∞	D
				5 B	5 D	∞	E ou F
					5 D	9 E	F
						5,5 F	T

L'itinéraire le plus rapide pour aller de A à T est :

$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow T$

Il a une durée de $4+0,5+0,5+0,5=5,5$ (minutes).

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Le système d'équations linéaire est équivalent à l'équation matricielle $AX=B$ d'inconnue X .

On a alors $X=A^{-1} \times B$ c'est-à-dire $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

