

### Devoir TES spécialité n°3

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée.

Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.

Après une étude statistique, on considère que :

- si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est 0,88 ;
- si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est 0,8.

Les résultats numériques seront arrondis à  $10^{-2}$  près.

1. En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B.



3. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  (respectivement  $b_n$ ) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après  $n$  jours, sur le site A (respectivement sur le site B).

On note  $P_n$  la matrice  $(a_n \ b_n)$  correspondant à l'état probabiliste après  $n$  jours.

Le premier jour, les vélos sont également distribués sur les deux sites. On a donc  $P_0=(0,5 \ 0,5)$ .

a. On donne  $M^2 = \begin{bmatrix} 0,7984 & 0,2016 \\ 0,336 & 0,664 \end{bmatrix}$ .

Calculer  $P_2$  en donnant le détail des calculs matriciels.

b. Calculer  $P_4$  et interpréter le résultat dans le contexte du problème.

c. Déterminer l'état stable du graphe, noté (a b).

d. Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.

La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.

Ce choix paraît-il adapté à la situation ?

4. a. Démontrer que  $a_{n+1}=0,68a_n+0,2$ .

b. Soit  $u_n=a_n-0,625$ .

Démontrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme  $u_0$ .

c. En déduire que  $a_n=0,125 \times 0,68^n + 0,625$ .