# Sujet 1

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant t=0, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.

On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice $N_t$ ; ainsi $N_0=(100\ 0\ 0)$.

On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de t=0 à t=60) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne :

$$M^2=\begin{bmatrix}0,42 & 0,22 & 0,36\\ 0,19 & 0,27 & 0,54\\ 0,28 & 0,04 & 0,68\end{bmatrix} \text{ et } M^{20}\approx\begin{bmatrix}0,3125 & 0,125 & 0,5625\\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\end{bmatrix}$$

Calculer $N_2$. Interpréter le résultat obtenu.

4. Calculer $N_0\times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.

Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.

À l'instant t=0, le site C est donc infecté.

a. Quelle est la probabilité qu'à l'instant t=1 le site A soit infecté ?

b. Quelle est la probabilité qu'à l'instant t=2 les trois sites soient infectés ?

# Sujet 2

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).

Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;
- 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
- Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste G de sommets S et T où :

- S est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR » ;
- T est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM ».

Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel n :

- $s_n$ la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en 2014+n ;
- $t_n$ la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en 2014+n.

On note $P_n=(s_n\ \ t_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année 2014+n.

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

## Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste G.

2. On admet que M la matrice de transition du graphe G en considérant les sommets dans l'ordre est $M=\begin{bmatrix}0{,}59 & 0{,}41\\ 0{,}09 & 0{,}91\end{bmatrix}$.

On note $P=(a\ \ b)$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe G.

a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases}0{,}41\,a-0{,}09\,b=0\\ a+b=1\end{cases}$.

b. Résoudre le système précédent.

3. On admet que $a=0{,}18$ et $b=0{,}82$. Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

## Partie B

En 2014, on sait que 35% des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65% sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $P_0=(0{,}35\ \ 0{,}65)$.

1. Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1}=0{,}5t_n+0{,}41$.

3. Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

```
L1  Variables :     T est un nombre
L2                  N est un nombre entier
L3  Traitement :    Affecter à T la valeur 0,65
L4                  Affecter à N la valeur 0
L5                  Tant que T<0,80
L6                      Affecter à T la valeur .........
L7                      Affecter à N la valeur .........
L8                  Fin Tant que
L9  Sortie :        Afficher .........
```

4. On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel n par $u_n=t_n-0{,}82$.

a. Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme.

b. En déduire que $t_n=-0{,}17\times0{,}5^n+0{,}82$.

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $-0{,}17\times0{,}5^n+0{,}82>0{,}80$.

d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.