Correction DM TES Continuité

Exercice 125 p. 48

1)a) $u_2=100\times1,05+20=125$.
b) Pour trouver u_{n+1}, on ajoute 5% de u_n à u_n, autrement dit, on multiplie u_n par 1,05 puis on ajoute 20, donc $u_{n+1}=1,05u_n+20$.
2)a) $v_1=100+400=500$.
b) $v_{n+1}=u_{n+1}+400=1,05u_n+20+400=1,05(v_n-400)+420=1,05v_n$ de raison 1,05.
c) Donc $v_n=500\times1,05^{n-1}$ puisque la suite commence à n=1, c'est la formule $v_n=v_m\times q^{n-m}$ avec m=1 ; et $u_n=v_n-400=500\times1,05^{n-1}-400$.
d) Attention, il y a n termes (même remarque que ci-dessus) !

$$v_1+\ldots+v_n=v_1\times\frac{1,05^n-1}{1,05-1}=500\times\frac{1,05^n-1}{0,05}=10000\times\left(1,05^n-1\right).$$

$u_1+\ldots+u_n=v_1-400+\ldots+v_n-400=10000\times(1,05^n-1)-400n$.

Exercice 63 p. 71

1) Le premier point donne deux informations : $\mathscr{C}$ passe par le point A de coordonnées $(0;-1)$ et $f'(0)=0$ donc $f(0)=-1$, c'est-à-dire $a\times0^3+b\times0^2+c\times0+d=d=-1$.
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ donc $c=0$.

Le deuxième point dit que $f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$ donc

$$3a\left(\frac{2}{3}\right)^2+2b\times\frac{2}{3}=0 \text{ càd } \frac{4a}{3}+\frac{4b}{3}=0 \text{ soit } a+b=0 \text{ ou } a=-b.$$

Le dernier point dit que $f'(1)=1$ soit $3a+2b=1$ donc $-3b+2b=1$ et $b=-1$ donc $a=1$.

2)a) $f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$ d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	-1	$\searrow$	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$\nearrow +\infty$

b) On a $f(1)=-1$, $f(2)=2^3-2^2-1=8-4-1=3$ donc, d'après le tableau de variations, $f(x)<0$ si $x<1$ et $f(x)>0$ si $x>2$.
Quant à [1;2], f est strictement croissante et dérivable, donc continue sur cet intervalle, de plus $f(1)<0$ et $f(2)>0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=0$ a une seule solution α sur [1;2], donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.
c) Voir ci-dessus. Pour préciser un encadrement à 0,1 près de α, on peut utiliser la touche Table de la calculatrice, ce qui donne $\alpha\in[1,4;1,5]$.
3)b) Les deux courbes se coupent si et seulement si $x^3-1=x^2$, c'est-à-dire si $f(x)=0$, or on vient de montrer que cette équation a une seule solution : α. Le point d'intersection a donc pour coordonnées $(\alpha;\alpha^2)$.

Il est plus facile de réussir la quadrature du cercle que d'avoir raison d'un mathématicien.
-- Morgan, Augustus de