Correction du DM TES Fonctions

Exercice 49 p. 66

A)1) $f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$ d'où le signe, immédiat :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	

2) f est continue et strictement décroissante sur $[-1;1]$, de plus $f(-1)>0$ alors que $f(1)<0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution β sur $[-1;1]$.

3)a) $f(-2)=-3$, on choisit $a=-2$.

b) Comme ci-dessus, f est strictement croissante, continue et change de signe sur $[-2;-1]$ donc admet une seule solution α à l'équation $f(x)=0$ sur $[-2;-1]$.

Comme f est aussi strictement croissante sur $]-\infty;-2]$, $f(x)<-3$ pour tout x de cet intervalle, donc f ne s'annule qu'en α sur $]-\infty;-1]$.

4) De même, $f(2)=5$ et f ne s'annule qu'une fois en γ sur $[1;+\infty[$.

5) $\alpha\approx-1{,}8$, $\beta\approx0{,}2$ et $\gamma\approx1{,}6$.

B) Donc $f(x)\geqslant0$ a pour solution $[\alpha;\beta]\cup[\gamma;+\infty[$.

Exercice 89 p. 91

1) f semble strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Posons $u(x)=x^2$ et $v(x)=e^{x-1}$, on a $u'(x)=2x$ et $v'(x)=e^{x-1}$ donc $f'(x)=x-2x.e^{x-1}-x^2.e^{x-1}=x(1-(2+x)e^{x-1})=xg(x)$.

3)a) Posons cette fois $u(x)=2+x$ et $v(x)=e^{x-1}$, on a $u'(x)=1$ et $v'(x)=e^{x-1}$ donc :

$g'(x)=-u'(x)v(x)-u(x)v'(x)=-1e^{x-1}-(x+2)e^{x-1}=-(x+3)e^{x-1}$.

$g'(x)$ est négatif si $x\geqslant-3$ et positif si $x\leqslant-3$ puisque $e^{x-1}>0$.

b) Donc g est strictement croissante sur $]-\infty;-3]$ et strictement décroissante sur $[-3;+\infty[$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

c) Pour commencer, $g(x)\geqslant1$ si $x\leqslant-2$ car dans ce cas, $x+2\leqslant0$, $-(x+2)e^{x-1}\geqslant0$ et $g(x)=1-(x+2)e^{x-1}\geqslant1$.

Ensuite, g est strictement décroissante et continue sur $[-2;1]$, or $g(-2)=1$ et $g(1)=-2$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule une seule fois en α sur $[-2;1]$. Comme g est aussi strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, g est strictement négative sur cet intervalle.

Conclusion : $g(x)=0$ a une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

On a $g(0{,}2)>0$ et $g(0{,}21)<0$ donc $\alpha\in]0{,}2;0{,}21[$.

d) Nous venons de montrer que si $x<\alpha$, $g(x)>0$ et que si $x>\alpha$, $g(x)<0$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

4)c) La conjecture est donc fausse.