Initiation au raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser l'axiome de récurrence :

- On démontre qu'elle est vraie en $n=0$ (initialisation).
- On démontre que si elle est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$, alors elle est vraie pour le suivant, $n+1$ (hérédité).

Pour utiliser l'axiome de récurrence, on démontre que :

- P_0 est vraie, c'est souvent facile.
  Parfois on initialise au rang $n=1$ ou $n=2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  On suppose que P_n vraie, on démontre alors que P_{n+1} est vraie elle aussi.

Et on conclut.

Exercice 1

Soit la suite u définie par récurrence par $u_0=5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+3$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n=3n+5$.

Exercice 2

Soit la suite u définie par récurrence par $u_0=0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+2n+1$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n=n^2$.

Exercice 3

Soit la suite u définie par $u_0=3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=-2u_n+6$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n=(-2)^n+2$.

Exercice 4

Soient $b, r \in \mathbb{R}$. Soit u la suite réelle déterminée par $u_0=b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+r$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n=b+nr$.

Exercice 5

Soit la suite u définie par récurrence par $u_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 6

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Exercice 7

Soit la suite u définie par $u_0=0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+n+1}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, c'est-à-dire que la suite est bien définie puis que $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n$.

Pour le produit « $v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$ », on écrit « $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} v_k$ ».
On lit « produit de $k=0$ à n de v_k ».

Exercice 8

Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$