Correction du DM de géométrie analytique

Je vous laisse le soin de vérifier les figures.

Exercice 1

$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$ et $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-5+4}{2}=-\frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. Pour que ABCD soit un parallélogramme, il faut (et suffit) que ses diagonales [AC] et [BD] aient le même milieu K.

On a $x_K=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+4}{2}=1$ et $y_K=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{4+6}{2}=5$.

On peut utiliser l'exercice 51 p. 257 ou refaire les calculs puisque D est le symétrique de B par rapport à K :

$x_D=2x_K-x_B=2\times1-(-3)=2+3=5$ et

$y_D=2y_K-y_B=2\times5-5=10-5=5$. Donc D(5;5).

2. $x_K=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{2}=\frac{\frac{-2}{6}+\frac{1}{6}}{2}=\frac{\frac{-1}{6}}{2}=\frac{-1}{12}$ et

$y_K=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{\frac{2}{3}+3}{2}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{9}{3}}{2}=\frac{\frac{11}{3}}{2}=\frac{11}{6}$.

De même, $x_D=2x_K-x_B=2\times\frac{-1}{12}-1=\frac{-1}{6}-\frac{6}{6}=\frac{-7}{6}$ et

$y_D=2y_K-y_B=2\times\frac{11}{6}-\frac{1}{2}=\frac{22}{6}-\frac{3}{6}=\frac{19}{6}$ et $D\left(\frac{-7}{6};\frac{19}{6}\right)$.

Exercice 3

1. Vérifions d'abord si les diagonales de ABCD se coupent en leurs milieux. Les coordonnées du milieu de [AC] sont $x=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{-3+0}{2}=-\frac{3}{2}$, celles du milieu de [BD] sont $x=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{1-4}{2}=-\frac{3}{2}$ donc ABCD est un parallélogramme.

Calculons les longueurs de ses diagonales pour vérifier s'il est un rectangle :

$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(-2-3)^2+(-3-0)^2}=$
$\sqrt{25+3}=\sqrt{28}$

$BD=\sqrt{(-1-2)^2+(1-(-4))^2}=\sqrt{3+25}=\sqrt{28}$

Ses diagonales du parallélogramme ABCD sont de même longueur, c'est donc un rectangle.

Calculons les longueurs de deux côtés consécutifs pour vérifier s'il est aussi un losange :

$AB=\sqrt{(-2-(-1))^2+(-3-1)^2}=\sqrt{(-2+1)^2+(-4)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

$BC=\sqrt{((-1)-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

Les côtés AB et BC ont la même longueur, dons le parallélogramme ABCD est un losange.

Comme il est déjà un rectangle, ABCD est un carré.

2. Pour savoir si N est sur la médiatrice d de [BD], il faut (et il suffit) vérifier que NB=ND, idem pour P.

$NB=\sqrt{(1-(-1))^2+(-1-1)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$ et

$ND=\sqrt{(1-2)^2+(-1-(-4))^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ donc $N\notin d$.

$BP=\sqrt{(-1-8)^2+(1-3)^2}=\sqrt{81+4}=\sqrt{85}$

$DP=\sqrt{(8-2)^2+(3-(-4))^2}=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}$ donc $P\in d$.

Exercice 4
Commençons par calculer les longueurs des côtés de DAO : $OA^2=(12-0)^2+(9-0)^2=144+81=225$ $OD^2=\left(\frac{12-9\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{9+12\sqrt{3}}{2}-0\right)^2=$ $\frac{12^2-2\times12\times9\sqrt{3}+9^2\times\sqrt{3}^2}{4}+\frac{9^2+2\times12\times9\sqrt{3}+12^2\times\sqrt{3}^2}{4}=$ $\frac{144-216\sqrt{3}+243+81+216\sqrt{3}+432}{4}=\frac{900}{4}=225$ $AD^2=\left(\frac{12-9\sqrt{3}}{2}-12\right)^2+\left(\frac{9+12\sqrt{3}}{2}-9\right)^2=$ $\left(\frac{-12-9\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-9+12\sqrt{3}}{2}\right)^2=225$ Donc DOA est équilatéral.