

Transformations du plan

Rappels

La symétrie axiale

Définition

On se donne une droite d .

Le **symétrique** d'un point A par rapport à la droite d est le point B tel que :

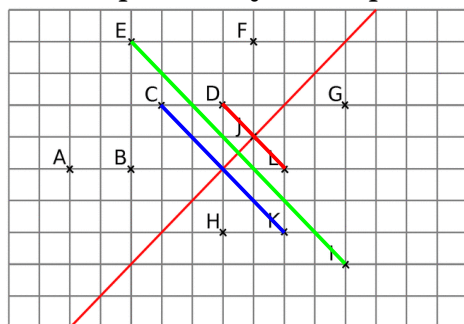
- si A n'appartient pas à d , d est la médiatrice du segment $[AB]$,
- si A appartient à d , B est le point A .

Cette action de déterminer les points symétriques est appelée **symétrie axiale**.

Exemple

On se donne la symétrie axiale d'axe la droite d tracée en rouge.

- J est son propre symétrique par rapport à d .
- Le symétrique de D est L .
- Le symétrique de K est C .
- Le symétrique de E est I .
- La droite symétrique de (KE) est la droite (CI) .
- Le segment symétrique de $[JK]$ est $[JC]$.



Propriété

Deux figures symétriques ont les mêmes formes, les mêmes angles et les mêmes longueurs.

La symétrie centrale

Définition

On se donne un point O .

Le symétrique d'un point A par rapport au point O est le point B tel que :

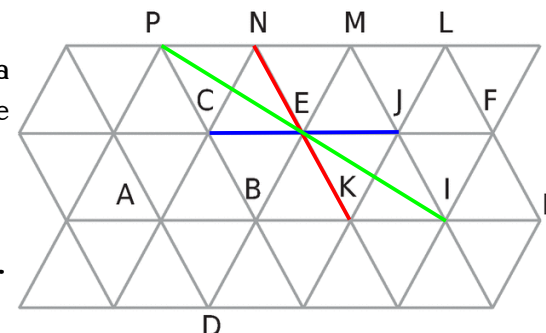
- si O et A sont distincts, O est le milieu de $[AB]$,
- si O et A sont confondus, B est le point A .

Cette action de déterminer les points symétriques est appelée **symétrie centrale**.

Exemple

On se donne la symétrie centrale de centre le point E .

- E est son propre symétrique par rapport à E .
- Le symétrique de N est K .
- Le symétrique de C est J .
- Le symétrique de P est I .
- La droite symétrique de (CP) est (JI) .
- Le segment symétrique de $[NC]$ est $[KJ]$.



Propriétés

Deux figures symétriques ont les mêmes formes, les mêmes angles et les mêmes longueurs.

Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.

Remarque

Faites le lien entre ces deux symétries et les propriétés des quadrilatères (parallélogramme, rectangle, losange).

La translation

Définition

On se donne deux points A et B dans cet ordre.

Par la **translation** qui envoie A sur B, le **translaté** du point C est le point D tel que les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

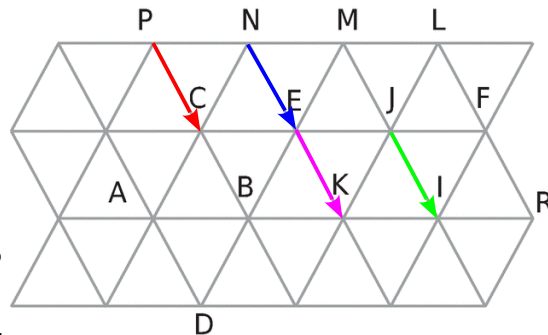
Autrement dit, ABDC est un parallélogramme.

On dit que par cette translation, l'image de C est D.

Exemple

On se donne la translation qui envoie N sur E.

- L'image de N est E.
- L'image de P est C.
- L'image de J est I.
- L'image de E est K.
- La droite symétrique de (JE) est (IK).
- Le segment symétrique de [PE] est [CK].



Propriétés

Deux figures images par une translation ont les mêmes formes, les mêmes angles et les mêmes longueurs.

Si deux droites sont images par une translation alors elles sont parallèles.

Remarque

Faites le lien entre la translation et les propriétés des quadrilatères (parallélogrammes, rectangles, losanges et carrés).

La rotation

Définition

On se donne un point O, une mesure d'angle $\hat{a}$ et un sens de rotation.

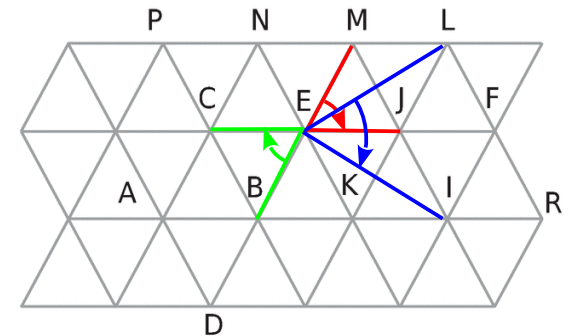
Par la **rotation** de centre O et d'angle $\hat{a}$, l'image du point A est le point B tel que :

- Si A et O sont distincts, le triangle AOB est isocèle en O et l'angle $\widehat{AOB} = \hat{a}$ (dans le même sens).
- Si A et O sont confondus, B est le point A.

Exemple

On se donne la rotation de centre E, d'angle 60° qui tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

- L'image de E est E lui-même.
- L'image de M est J.
- L'image de L est I.
- L'image de B est C.
- L'image de la droite (LB) est (IC).
- L'image du segment [MB] est [JC].



Propriété

Deux figures images par une rotation ont les mêmes formes, les mêmes angles et les mêmes longueurs

Remarque

Une symétrie centrale est une rotation d'angle 180° .

Homothéties

Définition

On se donne un point A et un nombre k (différent de 0).

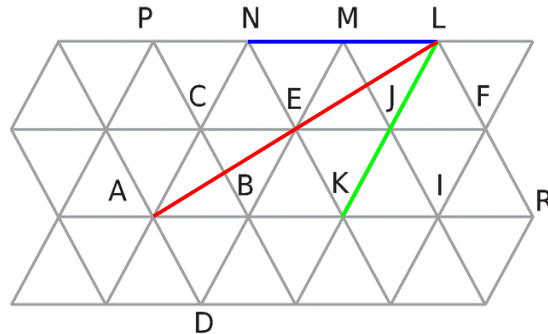
Par l'**homothétie** de centre A et de rapport k, l'image d'un point M du plan est le point N tel que :

- Si M et A sont distincts, on trace la droite (AM).
 - Si k est positif, on place N sur la demi-droite [AM) tel que $AN = k \times AM$.
 - Si k est négatif, on place N sur l'autre demi-droite d'origine A (qui ne contient pas M), tel que $AN = (-k) \times AM$. Autrement dit, A est entre M et N.
- Si M et A sont confondus, N est le point M.

Exemples

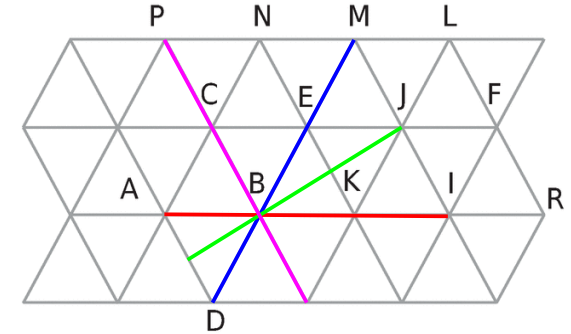
On donne l'homothétie de centre L et de rapport 2.

- L'image du point L est L lui-même.
- L'image de M est N.
- L'image de J est K.
- L'image de E est A.
- L'image de la droite (JM) est (KN).
- L'image du segment [JE] est [KA].



On se donne l'homothétie de centre B et de rapport $-0,5$.

- L'image du point B est le point B lui-même.
- L'image de I est A.
- L'image de M est D.
- L'image de J est le milieu du segment [AD].
- L'image de la droite (MI) est (AD).
- L'image du segment [PM] est [DR] où R est l'intersection de (PB) et de (KL).



Propriétés

Les longueurs de la figure image par une homothétie de rapport k sont les longueurs de la figure initiale multipliées par k (si $k > 0$) ou par $-k$ (si $k < 0$).

L'image d'une droite est une droite parallèle.

Deux figures images par une homothétie ont les mêmes formes et les mêmes angles.

Remarques

Si $k > 0$, on a une figure de Thalès-triangle et si $k < 0$, on a une figure de Thalès-papillon.

Si $k = -1$, l'homothétie est une aussi une symétrie centrale.