

A Nombres réels, analyse élémentaire

Exercice 1. Irrationalité de e

On rappelle que e est la somme de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

1° Montrer que pour tout entier n ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Indication : majorer le reste à l'ordre n par la somme d'une série géométrique convenable.

2° En déduire que e est irrationnel. Indication : si $e = p/q$, avec p et q entiers, les inégalités précédentes conduisent à une contradiction si $n \geq q$.

Exercice 2. 1° Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ f(x) &= 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{aligned}$$

n'est continue en aucun point.

2° Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ f(x) &= 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{aligned}$$

est discontinue pour x rationnel, continue pour x irrationnel. Indication : remarquer que, un nombre $A > 0$ étant donné, tout intervalle borné ne contient qu'un nombre fini de rationnels de dénominateur inférieur à A .

Exercice 3. Sous-groupes de $\mathbf{R}$

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$, autre que le groupe réduit à l'élément 0. On pose $\alpha = \inf\{x, x > 0 \text{ et } x \in G\}$.

1° Montrer que si $\alpha = 0$, tout intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contient un élément de G . En déduire que G est dense dans $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire a une intersection non vide avec tout intervalle ouvert de $\mathbf{R}$).

2° On suppose maintenant que $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha \in G$, puis que $G = \mathbf{Z} \cdot \alpha$ (ensemble des multiples entiers de α). Montrer que tout sous-groupe *fermé* de $\mathbf{R}$ autre que $\mathbf{R}$ est de cette forme.

3° Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On appelle *période* de f tout nombre t tel que

$$\forall x, x \in \mathbf{R}, f(x+t) = f(x)$$

Montrer que les périodes de f forment un sous-groupe fermé de $\mathbf{R}$.

4° Soit u un nombre irrationnel. Montrer que le sous-groupe

$$G = \{mu + n, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$$

est dense dans $\mathbf{R}$.

Application : montrer qu'il y a une infinité de puissances entières de 2 dont l'écriture dans le système décimal commence par 777. Généraliser cet énoncé.

Exercice 4. Morphismes de $\mathbf{R}$

1° Quels sont les morphismes croissants (resp. continus) de $(\mathbf{R}, +)$ dans lui-même ?

2° Quels sont les morphismes de corps de $\mathbf{R}$ dans lui-même ?

Exercice 5. Développement décimal d'un nombre réel.

Soit $x \in [0, 1]$ un nombre qui n'est pas de la forme $p/10^q$, où $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe une suite unique $(a_k)_{k \geq 1}$ d'entiers compris entre 0 et 9, tels que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Indication : remarquer que pour tout entier k positif, il existe un unique intervalle contenant x de la forme $[p/10^k, (p+1)/10^k]$, avec $p \in \mathbf{Z}$; puis appliquer le principe des intervalles emboîtés.

On dit que la suite $(a_k)_{k \geq 0}$ est *périodique à partir d'un certain rang* s'il existe des entiers positifs k_0 et r tels que $a_{k+r} = a_k$ pour tout k supérieur à k_0 . Montrer que la suite associée à x satisfait à cette propriété si et seulement si x est *rationnel*.

Que peut-on dire si $x = p/10^q$?

Exercice 6. Limites supérieure et inférieure

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée de réels. On pose

$$\begin{aligned} v_n &= \sup\{u_k, k \geq n\} \\ w_n &= \inf\{u_k, k \geq n\} \end{aligned}$$

1° Montrer que les suites $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ sont convergentes.

On pose $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

2° Montrer que ces deux nombres sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

3° Adapter ce qui précède au cas d'une suite non nécessairement bornée.

4° Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ est égal à $1/\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}$

Exercice 7. Continuité uniforme

Les applications suivantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ sont-elles uniformément continues ?

$$x \mapsto x \sin x ; x \mapsto \ln(1+x) ; x \mapsto \sqrt{x}$$

et les suivantes ?

$$x \mapsto x^2 ; x \mapsto \sin x^2$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que l'image par f' de tout intervalle est un intervalle.

Exercice 9. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de polynômes, qui converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction f . Montrer que f est un polynôme.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres positifs. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n}$ (S_n désignant la somme partielle d'ordre n) sont simultanément divergentes ou convergentes.

Exercice 11. Quelle est la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$? (utiliser le lemme d'Abel). En déduire celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$

B Algèbre linéaire

Exercice 12. Échauffement

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K .

1° Montrer que tout endomorphisme de rang 1 peut se mettre sous la forme

$$x \mapsto \alpha(x)v \quad \text{où } \alpha \in E^* \text{ et } v \in E.$$

2° Montrer que le centre de $\text{End}(E)$ est formé des homothéties. Même question pour $Gl(E)$.

3° Montrer que $\text{End}(E)$ ne possède aucun idéal bilatère non trivial (c'est à dire distinct de 0 et de $\text{End}(E)$ lui-même). Cette propriété reste-t-elle vraie si E n'est pas de dimension finie ?

Exercice 13. Dualité

On considère un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K .

1° Soit F un sous-espace vectoriel de E . Quel est le dual F^* de F ? Et le dual $(E/F)^*$ de l'espace vectoriel quotient E/F ? Quels rapports entretiennent-ils entre eux et avec E^* ?

2° Montrer que l'on a une application bilinéaire naturelle de $E^* \times E$ vers K .

3° Montrer que l'application T définie sur $\text{End}(E) \times \text{End}(E)$ par

$$(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$$

est une application bilinéaire symétrique et non dégénérée. Déterminer sa signature si $K = \mathbf{R}$.

4° Montrer que le dual de $\text{Hom}(E, F)$ s'identifie à $\text{Hom}(F, E)$.

Exercice 14. Montrer, en utilisant (??), que le sous-ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$. Donner des résultats qui se démontrent facilement en utilisant cette propriété.

Exercice 15. Symétries et projections orthogonales

1° Donner la structure des isométries d'un espace euclidien de carré égal à l'identité (autrement dit, des isométries *involutives*), puis des endomorphismes symétriques égaux à leur carré (autrement dit des endomorphismes symétriques *idempotents*).

Plus généralement, que peut-on dire des endomorphismes involutifs de E dans E ? des endomorphismes idempotents ?

2° A la lumière du 1, si F est un sous-espace vectoriel de E , on appelle *symétrie orthogonale par rapport à F* l'application linéaire σ_F définie par

$$\begin{aligned} \sigma_F(x) &= x \text{ si } x \in F ; \\ \sigma_{F^\perp}(x) &= -x \text{ si } x \in F^\perp. \end{aligned}$$

et *projection orthogonale sur F* l'application linéaire p_F définie par

$$\begin{aligned} p_F(x) &= x \text{ si } x \in F ; \\ p_{F^\perp}(x) &= 0 \text{ si } x \in F^\perp. \end{aligned}$$

a) Donner une relation simple entre σ_F et p_F .

b) Expliciter σ_F et p_F quand $(F = \mathbf{R}a)^\perp$, où a est un vecteur unitaire.

3° Montrer que quelle que soit $f \in O(E)$,

$$f \circ \sigma_F \circ f^{-1} = \sigma_{f(F)} \quad \text{et} \quad f \circ p_F \circ f^{-1} = p_{f(F)}$$

4° Montrer que si $\dim F = \dim F'$, alors σ_F et $\sigma_{F'}$ sont conjuguées dans $O(E)$. Peut-on conjuguer σ_F et $\sigma_{F'}$ au moyen d'une isométrie directe ?

5° On appelle *retournements* les symétries orthogonales par rapport à un sous-espace de codimension 2. Montrer que tout retournement est une isométrie directe, et que si $\dim E \leq 3$, toute isométrie directe est le produit d'au plus $\dim E$ retournements.

6° Montrer que si $\dim E \geq 2$, le centre de $O(E)$ est égal à $\{\pm I\}$ et que si $\dim E \geq 3$ le centre de $O^+(E)$ est égal à $\{\pm I\}$ en dimension paire, et à $\{I\}$ en dimension impaire.

Exercice 16. Le corps des quaternions

1° Montrer que les matrices complexes de la forme

$$\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$$

forment un sous-anneau de $M_2(\mathbf{C})$ dont tout élément non nul est inversible, donc un corps. Ce corps s'appelle *corps des quaternions* et se note $\mathbf{H}$.

2° Il est traditionnel (et commode) de poser

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

En désignant par E la matrice unité $(2, 2)$, montrer que tout quaternion q s'écrit d'une manière unique sous la forme $aE + bI + cJ + dK$, où a, b, c, d sont réels, et que

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E, IJ = -JI = K, JK = -KJ = I, KI = -IK = J.$$

3° On écrit désormais les quaternions sous cette dernière forme. On remplace alors E, I, J et K par les minuscules correspondantes. Le sous-ensemble $\mathbf{R}E$ de $\mathbf{H}$ est un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{R}$, et on l'identifiera à $\mathbf{R}$. On pose

$$\bar{q} = aE - bI - cJ - dK.$$

Vérifier que

$$q\bar{q} = \bar{q}q = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

(ce qui redémontre que tout élément non nul de $\mathbf{H}$ est inversible), et que

$$\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1.$$

On vérifiera aussi que le centre de $\mathbf{H}$ (c'est à dire l'ensemble des éléments de $\mathbf{H}$ qui commutent avec tout autre) est égal à $\mathbf{R}$. On pose $\Re(q) = a$, $\text{Im}(q) = bI + cJ + dK$. Un quaternion est dit *réel* si $\text{Im}(q) = 0$, (ce qui équivaut à $\bar{q} = q$), *imaginaire pur*, ou plus brièvement *pur* si $\Re(q) = 0$ (ce qui équivaut à $q + \bar{q} = 0$).

4° On pose enfin $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$. C'est une norme sur $\mathbf{H}$ vu comme $\mathbf{R}$ -espace vectoriel d'après c). Montrer que

$$\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|.$$

5° Montrer que le groupe multiplicatif des quaternions de norme 1 est isomorphe à $SU(2)$, et homomorphe à la sphère S^3 .

6° Quels sont les morphismes de corps de $\mathbf{H}$ dans lui-même ?

Exercice 17. Quaternions et rotations

1° On identifie $\mathbf{R}^3$ (en tant qu'espace vectoriel) aux quaternions purs. Si s est un quaternion de norme 1 et h un quaternion pur, on pose

$$\rho(s) \cdot h = sh\bar{s}.$$

Montrer que $\rho(s) \cdot h$ est encore un quaternion pur, et que l'application linéaire $\rho(s)$ est dans $O(3)$.

2° Montrer que $\rho(s) \in SO(3)$ (utiliser un argument de connexité).

3° Montrer que

$$\rho(s)\rho(s') = \rho(ss'),$$

et que $\text{Ker}(\rho) = \pm e$.

4° Montrer que l'axe de la rotation $\rho(s)$ est donné par la partie pure du quaternion s . En déduire que si s est un quaternion pur de norme 1, $\rho(s)$ est un retournement (rotation d'angle π).

5° Montrer que ρ est surjective, et que $SO(3)$ est isomorphe à $SU(2)/\pm I$.

6° Imiter ce qui précède avec l'application ρ_1 de $S^3 \times S^3$ dans $Gl(\mathbf{R}^4)$ définie par

$$\rho_1(s, t).q = sq\bar{t}.$$

Exercice 18. Simplicité du groupe $SO(3)$

On se propose de montrer que si $\dim E = 3$ le groupe $O^+(E)$ n'a pas de sous-groupes distingués autres que $\{I\}$ et $O^+(E)$ lui-même (autrement dit que c'est un groupe *simple*). Soit donc $G \subset O^+(E)$ un sous-groupe distingué non réduit à l'élément neutre. Il s'agit de montrer que $G = O^+(E)$.

1° Montrer que si G contient un retournement, alors $G = O^+(E)$.

2° Montrer que si $f \in O^+(E)$ admet la valeur propre -1 , alors f est un retournement.

3° Montrer que G contient une rotation d'angle $\theta \geq \frac{\pi}{2}$. Soit R une telle rotation. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, d'après le 1 le théorème est prouvé (on prend R^2 !). On suppose donc que $\theta > \frac{\pi}{2}$. Montrer qu'il existe alors une droite D telle que D et $R(D)$ soient orthogonales (utiliser un argument de continuité).

4° Soit donc D une telle droite. Montrer que la transformation

$$\sigma_D \circ R \circ \sigma_D \circ R^{-1}$$

est un retournement et appartient à G . Conclure.

N.B. On démontre plus généralement que si $\dim E \geq 3$ et $\dim E \neq 4$, le seul sous-groupe distingué non trivial de $O^+(E)$ est (en dimension paire) son centre.

Exercice 19. Gram-Schmid

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base d'un espace euclidien E . Montrer qu'il existe une base orthonormée et une seule telle que

1. Pour tout k , $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
2. le produit scalaire $\langle v_k, e_k \rangle$ soit positif.

Exercice 20. Décomposer en sommes de carrés, en utilisant la méthode de Gauss, la forme quadratique $xy + yz + zx$.

Exercice 21. Critère de Sylvester

1° Soit f une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$, mise sous la forme $f(x) = {}^t x S x$, la matrice S étant symétrique. On suppose que f admet une "décomposition en sommes de carrés" $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i'^2$ telle que

$$x_i' = x_i + \sum_{j>i} t_{ij} x_j,$$

autrement dit qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice diagonale D telles que $S = {}^t T D T$, les éléments diagonaux de T étant de surcroît égaux à 1. (Remarque : cela signifie que la méthode de Gauss "naïve" marche). Montrer que l'on a alors

$$D_k = \alpha_1 \cdots \alpha_k,$$

où D_k désigne le k -ième mineur principal de A .

2° En déduire que f admet une décomposition en sommes de carrés obtenue de la façon précédente si et seulement si

$$D_1 D_2 \cdots D_r \neq 0,$$

où r est le rang de f .

3° En déduire le *critère de Sylvester* : pour que f soit définie positive, il faut et suffit que tous les mineurs principaux de S soient strictement positifs.

4° Montrer que toute matrice inversible A peut s'écrire d'une façon unique $A = TU$, où T est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, et U orthogonale (décomposition de Gauss du groupe linéaire).

Indication : utiliser le fait que, si

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

la forme quadratique $x \mapsto \|Ax\|^2$ est définie positive.

Montrer que les applications $A \mapsto T$ et $A \mapsto U$ ainsi définies sont continues.

Exercice 22. Soit S un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle, \rangle)$.

1° Montrer, *sans utiliser la réduction des endomorphismes autoadjoints*, que la fonction $x \mapsto \langle Sx, x \rangle$ est bornée sur la sphère unité, et y atteint sa borne supérieure.

2° Montrer que les vecteurs réalisant cette borne supérieure sont les vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre de S . En déduire une démonstration du théorème de réduction des endomorphismes autoadjoints.

3° Si S et T sont des endomorphismes autoadjoints, comparer les plus grandes valeurs propres de S , T et $S + T$.

Exercice 23. Calculer les polynômes caractéristique et minimal d'une matrice compagnon (n'importe quoi sur la dernière colonne, des 1 sous la diagonale et des zéros ailleurs).

Exercice 24. Calculer le déterminant d'une matrice circulante. Calculer le déterminant de Vander Monde.

Exercice 25. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps à q éléments. Dénombrer les ensembles suivants :

1. Les groupes $GL(E)$ et $SL(E)$.
2. L'ensemble des familles liées à r vecteurs.
3. L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d .
4. L'ensemble des sous-espaces affines de E de dimension d .
5. Soit F un sous-espace vectoriel de E . L'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d contenant F .
6. Tout autre ensemble que vous pourriez imaginer...

Exercice 26. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que pour tout j , $a_{jj} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible. Même question avec l'hypothèse : pour tout j , $a_{jj} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|$.

Exercice 27. Soit E l'espace des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ affines par morceaux et continues. Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on note f_α l'élément de E défini par $f_\alpha(x) = |x - \alpha|$. Notons f_1 la fonction constante égale à 1.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{[0,1]}$.
2. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ est une base de E .

Exercice 28. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un k -espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que les suites $\text{Ker}(f^n)$ et $\text{Im}(f^n)$ sont stationnaires à partir d'un même rang p .
2. Posons $\delta_n := \dim(\text{Ker}(f^{n+1})) - \dim(\text{Ker}(f^n))$. Montrer que δ_n est décroissante.

Exercice 29. Décomposition de Cartan

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. Un endomorphisme autoadjoint S est dit *positif* si $\langle Sx, x \rangle \geq 0$ pour tout x , *strictement positif* si la forme quadratique $x \mapsto \langle Sx, x \rangle$ est positive (resp. définie positive). Dans la suite, on parlera d'endomorphismes positifs ou strictement positifs en sous-entendant l'adjectif "autoadjoint".

1° Montrer que si S est strictement positif, alors S est inversible ; montrer qu'un endomorphisme autoadjoint est strictement positif si et seulement s'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \langle Sx, x \rangle \geq k\|x\|^2.$$

En déduire que l'ensemble des endomorphismes strictement positifs est un ouvert de l'espace vectoriel des endomorphismes autoadjoints.

2° Montrer que tout endomorphisme strictement positif S , il existe un unique endomorphisme strictement positif T tel que $T^2 = S$, et que l'application $S \rightarrow T$ est continue.

3° Soit M un endomorphisme inversible de E . Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal A et un endomorphisme autoadjoint strictement positif S tels que $M = AS$ (décomposition de Cartan du groupe linéaire).

Montrer que A et S sont uniques et que l'application

$$M \rightarrow (A, S)$$

est continue. Montrer que l'on a des résultats analogues pour une décomposition de la forme $M = S'A'$.

4° Etendre ce qui précède au cas des espaces hermitiens.

C Algèbre "générale"

Exercice 30. Groupes quotients et premier théorème d'isomorphisme

1. Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z}$ si et seulement si m et n sont premiers entre eux.
2. Soit H et K deux sous-groupe d'un groupe G . Posons $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$. Montrer par un exemple que HK n'est pas toujours un sous-groupe de G . Montrer que si K normalise H ($khk^{-1} \in H$ pour tout $k \in K$ et $h \in H$), alors HK est un sous-groupe de G . Montrer que H est un sous-groupe distingué de HK . Montrer enfin que $H/(H \cap K)$ est isomorphe à HK/K .
3. Soit q un entier strictement positif et G un groupe. Posons $qG := \{x^q : x \in G\}$. Montrer par un exemple que qG n'est pas toujours un sous-groupe de G . Montrer que si G est abélien qG est un sous-groupe de G . On suppose désormais que G est abélien. Soit H un sous-groupe de G . Montrer que $qG/(H \cap qG) \simeq qG/H$.

Exercice 31. Montrer que les anneaux $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{R}[X, Y]$ ne sont pas principaux.

Exercice 32. Critère d'Eisenstein

1° Soient p un nombre premier, et $P, Q \in \mathbf{Z}[X]$. Montrer que si p divise tous les coefficients de PQ , il divise tous les coefficients de P , ou tous les coefficients de Q .

2° On dit que $P \in \mathbf{Z}[X]$ est *primitif* si ses coefficients sont premiers entre eux. Montrer que le produit de deux polynômes primitifs est primitif.

3° Plus généralement, si $R \in \mathbf{Z}[X]$, on appelle *contenu* de R le pgcd, noté $c(R)$, de ses coefficients. Montrer que, si $P, Q \in \mathbf{Z}[X]$, $c(PQ) = c(P)c(Q)$ (lemme de Gauss).

4° Montrer que si $P \in \mathbf{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$, il l'est aussi dans $\mathbf{Q}[X]$.

5° Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$. On suppose qu'il existe un nombre premier p qui divise $a_0, \dots, a_{n-1}$ mais pas a_n , et tel que p^2 ne divise pas a_0 . Montrer que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$.

Application : si p est premier, le polynôme $\sum_{k=0}^{p-1} X^k$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 33. Polynômes cyclotomiques

Soit $d \geq 2$ et $\xi_1, \dots, \xi_{l_d}$ les racines d -ièmes primitives de l'unité. On pose $\phi_d(q) = \prod_{j=1}^{l_d} (q - \xi_j)$. Montrer que $q^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(q)$.

1° Montrer que ϕ_d est à coefficients entiers rationnels. Calculer ϕ_{12} .

2° On définit, pour $n \geq 2$,

$$\Pi_n(q) = \prod_{i=1}^n \frac{q^i - 1}{q - 1}.$$

Montrer que $\Pi_n(q)$ est un polynôme et que $\Pi_n(q) = \prod_{d=2}^n \phi_d(q)^{[n/d]}$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

D Topologie et analyse fonctionnelle

Exercice 34. Soient, sur $\mathbf{R}^N$, les normes $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ et $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$.

1° Pour $k, l \in \{1, 2, \infty\}$, trouver les meilleures constantes telles que $\|\cdot\|_k \leq C_{k,l} \|\cdot\|_l$.

2° Pour chacune de ces normes, calculer les normes matricielles correspondantes sur $M_N(\mathbf{R})$.

3° On remplace $\mathbf{R}^N$ par l'espace vectoriel E des suites $(x_n)_{n \geq 0}$ telles que $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers n . Comparer les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, et $\|x\|_\infty$ sur E , et montrer qu'elles sont deux à deux inéquivalentes.

Exercice 35. Soit $(a_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 1}$ une famille de vecteurs dans un Banach E tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = c_k$, la limite étant uniforme par rapport à k , c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0 \text{ tel que, pour tout } n \geq n_0 \text{ et tout } k \geq 1, |a_{n,k} - c_k| < \varepsilon$$

(on notera bien que le n_0 ne dépend que de ε , pas de k) ou encore ⁽¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq 1} |a_{n,k} - c_k| \right) = 0.$$

On suppose de plus que, pour tout n , $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k} = b_n$ existe. Montrer alors que $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existent et sont identiques.

Exercice 36. Construire une famille $(a_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 1}$ pour laquelle $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = c_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k} = b_n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existent mais pour laquelle on a $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Autrement

¹ Montrer que ces deux notions sont bien identiques...

dit, la convergence uniforme de $a_{n,k}$ par rapport à un de ses paramètres est nécessaire pour s'assurer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k},$$

la seule existence de toutes les limites considérées *ne suffit pas*.

Exercice 37. Soit $(a_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 1}$ des vecteurs d'un Banach E . On suppose que $\sum_{n \geq 1} \sup_{k \geq 1} \|a_{n,k}\| < \infty$ (convergence normale). Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_{n,k}$ converge uniformément par rapport à k , i.e. que la suite des sommes partielles $(\sum_{n=1}^N a_{n,k})_{N \geq 1}$ converge uniformément par rapport à k (voir exercice 35).

Exercice 38. Soit E un Banach et $(a_n)_{n \geq 1}$ des éléments de E . On suppose que $\sum_{n \geq 1} \|a_n\| < +\infty$; montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge dans E . Montrer que l'exercice 37 se déduit immédiatement de celui-ci, et justifier le terme de "convergence normale" mentionné alors.

Exercice 39. On se donne un espace métrique A et $z_0 \in A$ ⁽²⁾. Refaire les exercices 35, 37 et 38 lorsque l'on remplace l'indice k par une variable z évoluant dans $A \setminus \{z_0\}$ et tendant vers z_0 (au lieu de $k \rightarrow \infty$).

En particulier, on expliquera comment ces résultats permettent de retrouver le caractère continu d'une limite uniforme de fonction continues, ou le fait qu'une série de fonctions continues qui "converge normalement" (on fera attention à bien re-traduire cette notion) est aussi continue.

Exercice 40. Montrer que toute série entière est C^∞ sur son rayon de convergence.

Exercice 41. On définit sur $\mathbf{C}$ la "métrique SNCF":

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - z_2| & \text{si } \arg(z_1) = \arg(z_2), \\ |z_1| + |z_2| & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que d est bien une distance. Décrire la boule de centre z et de rayon r pour cette distance. Montrer que, si $z_0 \neq 0$, $f_{z_0}(z) = z + z_0$ n'est pas continue pour cette métrique; qu'en est-il de f_0 ?

Exercice 42. Soit X un ensemble, Y un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$. Existe-t-il une topologie sur X qui rende f continue? Peut-on dire qu'il y en a une de privilégiée? Relier cette topologie à celle, lorsque Y et Z sont des espaces topologiques, de la topologie produit sur $Y \times Z$.

Exercice 43. Notions de base sur la connexité

1° Montrer que tout espace connexe par arcs est connexe.

2° Montrer que la sphère S^n privée d'un nombre fini de points est connexe si $n \geq 2$.

3° Montrer que l'adhérence dans $\mathbf{R}^2$ du graphe de $\sin(1/x)$ sur $]0, 1]$ est connexe mais non connexe par arcs.

4° Donner un exemple de partie connexe de $\mathbf{R}^2$ dont l'intérieur n'est pas connexe.

Exercice 44. Connexité et groupes

Soit G un groupe topologique.

1° Montrer que tout sous-groupe ouvert de G est aussi fermé (considérer les classes à gauche - où à droite suivant vos options politiques -).

2° Montrer que la composante connexe de e dans G est un sous-groupe ouvert, fermé et distingué.

3° On suppose G connexe. Montrer que tout voisinage de e engendre le groupe G en entier.

4° Montrer que les groupes $Gl_n(\mathbf{C})$, $Sl_n(\mathbf{C})$, $Sl_n(\mathbf{R})$, $U(n)$ et $SU(n)$ sont connexes, et que $Gl_n(\mathbf{R})$ et $O(n)$ ont deux composantes connexes.

5° Montrer que le $O(1, 1)$ des matrices qui conservent la forme quadratique $x^2 - y^2$ sur $\mathbf{R}^2$ a quatre composantes connexes, et déterminer la composante connexe de l'élément neutre.

²En fait, la métrique est inutile, il suffit que z_0 ait une base dénombrable de voisinages

6° Dans $GL_n(\mathbf{C})$, on considère les sous-groupes $\mathcal{L} = \{\text{matrices triangulaires inférieures inversibles}\}$ et $\mathcal{U} = \{\text{matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale}\}$. Montrer que $\mathcal{LU} = \{LU : L \in \mathcal{L}, U \in \mathcal{U}\}$ est un ouvert de $GL_n(\mathbf{C})$, et que ce n'est donc pas un groupe.

Exercice 45. Soit K un compact métrique et $f : K \rightarrow K$ une application vérifiant: pour tous $(x, y) \in K$, $x \neq y$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Montrer que f a un unique point fixe (*on pourra par exemple considérer la fonction $x \in K \rightarrow d(f(x), x) \in [0, \infty[$*). Qu'en est-il si on supprime l'hypothèse de compacité?

Exercice 46. Soit K un compact métrique et $f : K \rightarrow K$ une application continue dilatante (i.e. $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$). Montrer que f est en fait une isométrie (*on pourra, une fois $x \in K$ et $y \in K$ choisis, considérer des suites $f^{(n_k)}(x)$ et $f^{(n_k)}(y)$ qui convergent, puis montrer que $f^{(n_{k+1}-n_k)}(x) \rightarrow x$, et se rappeler que $n_{k+1} - n_k \geq 1$*). Montrer que f est surjective (*la réponse est quasiment dans l'indication précédente!*).

Exercice 47. Montrer que $C([0, 1]; E)$ est un Banach lorsque E est un Banach. Plus généralement, on pourra voir que, si A est métrique complet et K est compact, alors $C(K; A)$ est un espace métrique complet.

Exercice 48. Soit $E = C([0, 1])$, $K \in C([0, 1]^2)$ et, pour $f \in E$, $s(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$. Montrer que $s : E \rightarrow E$ est linéaire continue et *compacte* (i.e. que s envoie la boule unité de E sur un ensemble relativement compact dans E).

Exercice 49. Soit E un Banach séparable et $(x_k)_{k \geq 1}$ une partie dense de E . On se donne des formes linéaires $l_n \in E'$ qui vérifient $\|l_n\| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(l_{n_p})_{p \geq 1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$, $(l_{n_p}(x_k))_{p \geq 1}$ converge. En déduire que $(l_{n_p}(x))_{p \geq 1}$ converge pour tout $x \in E$, et qu'il existe donc $l \in E'$, $\|l\| \leq 1$, telle que $l_{n_p}(x) \rightarrow l(x)$ pour tout $x \in E$ ("*convergence simple*", ou encore "*faible-**").

Exercice 50. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}$ telle que, pour tout K compact de Ω , il existe C_K vérifiant, pour tout n , $\sup_K |f_n| \leq C_K$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ de K telle que toutes les dérivées de $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ convergent uniformément sur tout compact de Ω , et telle que la limite des f_{n_k} soit holomorphe sur Ω .

E Intégration

Exercice 51.

1° Trouver une fonction continue f appartenant à $L^1(\mathbf{R})$ telle que $f(x)$ ne tende pas vers 0 quand $|x|$ tend vers l'infini. Même question en remplaçant $L^1(\mathbf{R})$ par $L^1(\mathbf{R}^n)$.

2° Pour quelles valeurs du réel α la fonction r^α est-elle intégrable sur la boule unité de $\mathbf{R}^n$? sur l'extérieur de la boule ?

Exercice 52. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des $x \in X$ tels que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge est mesurable et que la fonction $\lim_n f_n$ définie sur cet ensemble est mesurable.

Exercice 53. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue telle que

- pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot) \in L^1(\mathbf{R})$,
- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(\cdot, x) \in C^1(I)$,
- $\sup_{t \in I} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) \right| \in L^1(\mathbf{R})$.

On se donne $a, b : I \rightarrow \mathbf{R}$ dérivables. Calculer la dérivée, si elle existe, de $t \in I \rightarrow \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$.

Exercice 54. Montrer que $L^\infty(\mathbf{R})$ est complet.

Exercice 55.

- i) Quelles sont les inclusions générales entre $L^p(X)$ et $L^q(X)$ (le résultat dépend de la finitude de la mesure de X)?
- ii) Soit $f : X \rightarrow [0, \infty]$ mesurable. On prend $(r, s) \in [1, \infty]$, $\theta \in [0, 1]$ et p tel que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}$. Montrer que $p \in [1, \infty]$ et que $\|f\|_p \leq \|f\|_r^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$ (on pourra avoir intérêt à écrire $f = f^\theta f^{1-\theta}$). En déduire que, pour tout q compris entre r et s , $L^q \subset L^r \cap L^s$.

Exercice 56. Décrire les cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder.

Exercice 57. Résoudre $f * f = f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$. En déduire que la convolution n'a pas d'élément neutre dans $L^1(\mathbf{R}^N)$.

Exercice 58. Inégalité de Wirtinger

Soit f une fonction numérique C^1 sur $\mathbf{R}$ et 2π -périodique. Montrer que si $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$, alors

$$\int_0^{2\pi} f'^2(t) dt \geq \int_0^{2\pi} f^2(t) dt,$$

et trouver les fonctions f réalisant l'égalité.

Question subsidiaire : montrer que si f est continue et T -périodique, $\int_x^{x+T} f(t) dt$ ne dépend pas de x .

Exercice 59. Noyau de Dirichlet

1° Montrer que

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

2° Montrer que

$$\int_0^\pi \left| \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

3° Comment ce qui précède s'applique-t-il aux séries de Fourier ?

Exercice 60. Une application des séries de Fourier à l'analyse complexe

1° Considérons sur $\mathbf{R}$ la fonction de période 1, à valeurs complexes, donnée par

$$f_z(t) = \cos 2\pi zt \quad \text{pour } |t| < \frac{1}{2}$$

On suppose que $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$. Calculer ses coefficients de Fourier, et montrer que f_z est la somme de sa série de Fourier.

2° En déduire les formules

$$\begin{aligned} \cot \pi z &= \frac{1}{2} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} \\ \frac{\pi}{\sin \pi z} &= \frac{1}{2} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2} \end{aligned}$$

Exercice 61. Donner les domaines de définition des fonctions

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \quad \text{et} \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

et montrer qu'elles sont C^∞ sur leur domaine. Montrer que, lorsque tout est défini, $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p, q)\Gamma(p+q)$ (on pourra faire un changement de variable $(t, v) \rightarrow (tv, t(1-v))$ sur un domaine de $\mathbf{R}^2$ bien choisi).

Exercice 62. Calculer $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx$ (on pourra par exemple calculer $\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ par un changement de variable polaire).

Exercice 63. Calculer, pour $a > 0$, la transformée de Fourier de $x \rightarrow e^{-a|x|^2}$ dans $\mathbf{R}^N$ (on pourra se ramener au cas $N = 1$ et étudier une équation différentielle satisfaite par la transformée de Fourier en question).

Exercice 64. Soit μ une mesure finie sur la sphère unité S de $\mathbf{R}^N$; montrer que l'application $x \rightarrow \int_S \frac{1-|x|^2}{|x-y|^N} d\mu(y)$ ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne) est définie et C^∞ sur la boule unité de $\mathbf{R}^N$.

F Calcul différentiel

Exercice 65. Etudier l'image des droites $\Re(z) = cte$ et $\Im(z) = cte$ par les applications suivantes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} z &\mapsto e^z \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \\ z &\mapsto z^2 \\ z &\mapsto \sin z \end{aligned}$$

Exercice 66. Soit f une fonction de classe C^k sur $\mathbf{R}$. On définit $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{si } x \neq y, \quad g(x, x) = f'(x)$$

Montrer que f est C^{k-1} .

Exercice 67. Donner la différentielle de l'application $X \mapsto \det(X)$ de $M_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$

1. Pour $X = I$
2. Pour X inversible
3. Dans le cas général

Exercice 68. Soit C une courbe fermée plane de classe C^1 . Montrer que C admet un "triangle de lumière", c'est à dire un triangle dont les sommets sont sur C , les bissectrices intérieures correspondantes étant normales à C .

Exercice 69. Soit f de classe C^∞ sur un ouvert de $\mathbf{R}^N$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, et qui atteint un maximum local en x_0 . Que peut-on dire de ses dérivées premières et secondes (différentielle et hessienne)? Quand peut-on dire que la hessienne est définie négative en x_0 ?

Exercice 70. Montrer que, pour tout A matrice de $M_N(\mathbf{R})$, $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge, et que cette convergence est de plus uniforme sur les bornés de $M_N(\mathbf{R})$. Montrer que cette expression définit une fonction C^∞ de $M_N(\mathbf{R})$ dans $M_N(\mathbf{R})$.

Exercice 71. Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction C^2 , $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tels que $f(a, b, c) = 0$, $\partial_3 f(a, b, c) \neq 0$. Enoncer avec précision le théorème des fonctions implicites dans ce contexte. Montrer que la fonction implicite obtenue g est C^2 , et calculer $\partial_{12}^2 g$ en fonction des dérivées de f .

Exercice 72. Inégalité de Hadamard Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n .

1° Montrer que sur l'ensemble

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \cdots \|v_n\| = 1$$

la fonction $\det(v_1, \dots, v_n)$ atteint son maximum, que ce maximum est strictement positif, et qu'il est réalisé si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthonormée directe.

2° Montrer que la valeur absolue du déterminant de n vecteurs par rapport à une base orthonormée ne dépend pas de cette base. Pour des raisons évidentes, on note ce nombre $\text{vol}(v_1, \dots, v_n)$.

3° Montrer que

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_n) \leq \prod_{k=1}^n \|v_k\|,$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si les v_k sont deux à deux orthogonaux.

G Équations différentielles

Exercice 73. Théorème de Sturm-Liouville

1° Montrer que les zéros d'une solution non identiquement nulle d'une équation différentielle de la forme

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

sont isolés.

2° On considère les équations différentielles

$$x'' + p_1(t)x = 0 \tag{1}$$

$$x'' + p_2(t)x = 0 \tag{2}$$

où pour tout t réel, $p_1(t) > p_2(t)$. Soient x_1 et x_2 des solutions de (1) et (2) respectivement, telles que $x_1(a) = x_2(a) = 0$, $x'_i(a) > 0$ pour $i = 1, 2$, où a est un réel donné. Soit $]a, b[$ un intervalle sur lequel x_1 ne s'annule pas. Montrer que x_2 ne s'annule pas non plus.

Indication : introduire la fonction $y = x_1 x'_2 - x_2 x'_1$ et remarquer que $y' = (p_1 - p_2)x_1 x_2$

3° On considère maintenant l'équation différentielle

$$x'' + p(t)x = 0,$$

où, pour tout t réel, $0 < m^2 < p(t) < M^2$. Montrer que toute solution a une infinité de zéros, et que si t_1 et t_2 sont deux zéros consécutifs d'une solution non identiquement nulle,

$$\frac{2\pi}{M} < t_2 - t_1 < \frac{2\pi}{m}$$

Exercice 74. Théorème de comparaison

1° Soient f_1 et f_2 deux applications continues de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall (t, x) \in \mathbf{R}^2, f_1(t, x) < f_2(t, x)$$

Soient, sur un intervalle $[a, \alpha[$, des solutions x_1 et x_2 des équations différentielles $x'_1 = f_1(t, x)$ et $x'_2 = f_2(t, x)$ respectivement, telles que $x_1(a) = x_2(a)$. Montrer que $x_1(t) < x_2(t)$ pour tout $t \in]a, \alpha[$.

2° Application : montrer qu'aucune solution de l'équation $x' = t^2 + x^2$ n'est définie sur tout $\mathbf{R}$.

Exercice 75. Toute la théorie des équations différentielles linéaires en un exercice

Soit E un Banach et I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant t_0 . On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

où $A \in C(I; \mathcal{L}(E))$, $b \in C(I; E)$ et $x_0 \in E$.

- i) Justifier le terme "linéaire" associé à (3) et montrer que (3) admet une unique solution, qui est définie sur I en entier.
- ii) Montrer que l'ensemble des solutions (quand x_0 parcourt E) est un espace affine. A quelle condition nécessaire et suffisante cet espace est-il vectoriel?

On suppose $b = 0$.

- iii) Soit $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ la solution de (3). Montrer que, pour tout $t \in I$, $R(t, t_0) : x_0 \in E \rightarrow \varphi(t, t_0, x_0) \in E$ est un isomorphisme dont on calculera l'inverse. Montrer que $R(\cdot, t_0) \in C^1(I; \mathcal{L}(E))$ est l'unique solution de

$$\frac{d}{dt}R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0), \quad R(t_0, t_0) = Id_E.$$

Montrer que $R(a, b)R(b, c) = R(a, c)$. R est appelée résolvante de (3).

On suppose toujours $b = 0$ et on se place de plus en dimension finie n .

- iv) Trouver une équation différentielle satisfaite par $\det(R(\cdot, t_0))$ puis donner une expression de cette fonction.
- v) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ des solutions de (3) et $\Delta(t) = \det(x_1(t), \dots, x_n(t))$; montrer que

$$\Delta(t) = \Delta(t_0)\det(R(t, t_0)).$$

Une base de solutions de (3) est une base de l'espace vectoriel des solutions; déduire de ce qui précède que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de solutions de (3) si et seulement s'il existe $s \in I$ tel que $\Delta(s) \neq 0$.

On ne suppose plus $b = 0$, ni que E est de dimension finie.

- vi) Soit x la solution de (3). Trouver une équation différentielle satisfaite par $R(t, t_0)^{-1}x(t)$ et en déduire l'expression de x en fonction de R .