Groupe des isométries affines

Michel Coste

23 septembre 2007

1 Définitions, notations

On peut se reporter pour références à [Audin, Berger, Fresnel].

On se donne un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par l'espace vectoriel E. Ceci veut dire qu'on a une action du groupe additif de E

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (A, \vec{u}) & \longmapsto & A + \vec{u} \end{array}$$

qui est simplement transitive : $\mathcal{E}$ est non vide, et pour tout couple (A, B) de $\mathcal{E}$ il existe un unique $\vec{u} \in E$ tel que $A + \vec{u} = B$. On note alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. (La relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ exprime le fait qu'on a une action de groupe.)

Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ entre espaces affines dirigés par E et F respectivement est dite affine s'il existe un point $O \in \mathcal{E}$ et une application linéaire $\vec{f} : E \to F$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$. Alors $\vec{f}$ ne dépend pas du choix de O : si A est un autre point de $\mathcal{E}$, on a pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} f(M) &= f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) \\ &= f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OA}) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \ . \end{aligned}$$

On appelle $\vec{f}$ l'application linéaire associée à f.

Un espace affine euclidien est un espace affine sur $\mathbb{R}$ dirigé par un espace vectoriel muni d'une structure euclidienne, c.-à-d. d'un produit scalaire. Une isométrie d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que l'application linéaire associée appartienne au groupe orthogonal : $\vec{f} \in \mathrm{O}(E)$. Les isométries de $\mathcal{E}$ forment un groupe que l'on notera $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, et l'application $f \mapsto \vec{f}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ sur $\mathrm{O}(E)$.

Le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \to \mathrm{O}(E)$ est le sous-groupe distingué $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ des translations de $\mathcal{E}$. La translation de vecteur $\vec{u} \in E$ est l'application $t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $t_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}$. On a $t_{\vec{u}}(M) = t_{\vec{u}}(O) + \overrightarrow{OM}$, et donc $\overrightarrow{t_{\vec{u}}} = \mathrm{Id}_E$. Réciproquement si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application affine telle que $\vec{f} = \mathrm{Id}_E$, alors en choisissant $O \in \mathcal{E}$ et en posant $\vec{u} = \overrightarrow{Of(O)}$, on a pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{OM} = O + \vec{u} + \overrightarrow{OM} = M + \vec{u} = t_{\vec{u}}(M) \ .$$

Le groupe additif de E est isomorphe à $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ par $\vec{u} \mapsto t_{\vec{u}}$.

On peut résumer la situation par la suite exacte d'homomorphismes de groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{O}(E) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & f & \longmapsto & \vec{f} & & \\ & & \vec{u} & \longmapsto & t_{\vec{u}} & & & & . \end{array}$$

Ici 1 désigne le groupe trivial à un seul élément, et l'exactitude de la suite veut dire que l'image de chaque homomorphisme est égal au noyau du suivant.

Les éléments de $\mathrm{O}(E)$ ont pour déterminant ± 1 ; on note $\mathrm{O}^+(E)$ les sous-groupe distingué des isométries de déterminant 1 (isométries directes), et $\mathrm{O}^-(E)$ son complémentaire (isométries indirectes). On note $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ le sous-groupe distingué de $\mathrm{Isom}(E)$ qui est l'image réciproque de $\mathrm{O}^+(E)$ par $f \mapsto \vec{f}$; ses éléments sont des isométries directes ou déplacements de $\mathcal{E}$. On note $\mathrm{Isom}^-(\mathcal{E})$ le complémentaire, ses éléments sont lers isométries indirectes ou antidéplacements de $\mathcal{E}$.

Exercice 1 *Les involutions de* $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ *(éléments de carré l'identité) sont les symétries orthogonales par rapport aux sous-espaces affines de* $\mathcal{E}$*.*

Exercice 2 *([Fresnel] p. 149) Soit* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$*. une application ensembliste. Montrer que* f *est une isométrie affine si et seulement si pour tous* M, N *de* $\mathcal{E}$ *on a* $d(M,N) = d(f(M), f(N))$ *(où* d *est la distance* $d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\|$*).*

Pour ce deuxième exercice, voici quelques indications pour le traiter de manière différente de celle de [Fresnel]. Une application d'un espace affine dans un autre est affine si et seulement si elle préserve les barycentres (les barycentres de deux points suffisent pour les espaces affines réels) - voir [Audin]. Supposons $C = \alpha A + (1-\alpha) B$ avec $0 < \alpha < 1$. On a alors $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$ et $\alpha\, d(A,C) = (1-\alpha)\, d(C,B)$. Donc $d(f(A), f(B)) = d(f(A), f(C)) + d(f(C), f(B))$ et $\alpha\, d(f(A), f(C)) = (1-\alpha)\, d(f(C), f(B))$; de la première égalité on déduit que C est aligné avec A et B et entre A et B, et avec la deuxième on conclut $f(C) = \alpha f(A) + (1-\alpha) f(B)$. On laisse à la lectrice le soin de régler le cas des autres valeurs de α.

2 Forme réduite, classification des isométries

Théorème 1 (forme réduite) *Soit* $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$*. Il existe une unique décomposition* $f = t_{\vec{u}}\, g$ *telle que*

1. g *admet au moins un point fixe,*
2. $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$*.*

De plus, g *et* $t_{\vec{u}}$ *commutent.*

Remarque. Il n'est pas difficile de décomposer une isométrie affine sous la forme $f = t_{\vec{u}}\, g$ avec g isométrie possédant au moins un point fixe. De fait, si on fixe $O \in \mathcal{E}$, on peut définir pour tout $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ l'isométrie affine $s^O(\varphi)$ par $s^O(\varphi)(M) = O + \varphi(\overrightarrow{OM})$; c'est l'unique isométrie affine d'application linéaire associée φ ayant O pour point fixe. On a alors, pour tout $f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, $f = t_{\overrightarrow{Of(O)}}\, s^O(\vec{f})$. Le point clé dans le théorème est qu'on demande que le vecteur de translation soit fixé par $\vec{f}$.

Commençons par montrer une propriété qui nous sera utile :
E est la somme directe orthogonale de $F = \ker(\mathrm{Id}_E - \vec{f})$ et de $G = \mathrm{im}(\mathrm{Id}_E - \vec{f})$.

Comme la somme des dimensions des deux sous-espaces est $\dim(E)$, il suffit de montrer qu'ils sont orthogonaux. Prenons donc x tel que $\vec{f}(x) = x$ et montrons qu'il est orthogonal à $y - \vec{f}(y)$ pour tout $y \in E$. On calcule

$$x \cdot (y - \vec{f}(y)) = x \cdot y - x \cdot \vec{f}(y) = x \cdot y - \vec{f}(x) \cdot \vec{f}(y) = 0 \ ,$$

ce qui montre la propriété annoncée : $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Choisissons un point $A \in \mathcal{E}$. Supposons qu'il existe une décomposition $f = t_{\vec{u}}\, g$ comme dans le théorème, et soit O un point fixe de g ; alors $\overrightarrow{Of(O)} = \vec{u}$ et $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$. On a

$$\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(O)} - \overrightarrow{f(A)f(O)} = \vec{u} + (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{f(A)f(O)})$$

et donc $\vec{u}$ est la composante selon F de $\overrightarrow{Af(A)}$ dans la décomposition en somme directe orthogonale $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$. Ceci montre l'unicité de la décomposition.

Si l'on définit $\vec{u}$ par $\overrightarrow{Af(A)} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$, et qu'on pose $g = t_{-\vec{u}}\, f$, alors on a bien $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$. Par définition de G, $\vec{v}$ peut s'écrire $\vec{w} - \vec{f}(\vec{w})$. Posons $O = A + \vec{w}$. Alors

$$\begin{aligned} g(O) &= f(O) - \vec{u} = f(A) + \vec{f}(\vec{w}) - \vec{u} = f(A) + (\vec{u} + \vec{w} - \overrightarrow{Af(A)}) - \vec{u} \\ &= A + \vec{w} = O \ , \end{aligned}$$

ce qui montre que g a O comme point fixe.

Pour la dernière partie du théorème, il suffit de calculer

$$g\, t_{\vec{u}} = t_{\vec{g}(\vec{u})}\, g = t_{\vec{f}(\vec{u})}\, g = t_{\vec{u}}\, g \ .$$

Exercice 3 *Les points fixes du g du théorème de forme réduite forment un sous-espace affine $\mathcal{F}$ dirigé par $F = \ker(\mathrm{Id}_E - \vec{f})$. Ce sous-espace $\mathcal{F}$ peut être caractérisé comme l'ensemble des points M tels que $d(M, f(M))$ soit minimum.*

Le théorème de forme réduite permet la classification des isométries de $\mathcal{E}$, à partir de celle des isométries de E. Par exemple, si E est un plan vectoriel euclidien, on sait que les éléments de $\mathrm{O}(E)$ sont

1) l'identité,
2) les rotations de centre l'origine,
3) les réflexions orthogonales par rapport à une droite vectorielle.

Les 1) et 2) sont directes, 3) indirectes. Les dimensions des sous-espaces fixes sont respectivement 2, 0 et 1. Grâce au théorème de forme réduite, on a la description des éléments de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$:

1) l'identité,
1') les translations (de vecteur non nul),
2) les rotations de centre un point de $\mathcal{E}$,
3) les réflexions orthogonales par rapport à une droite de $\mathcal{E}$,
3') les symétries glissées, composition d'une réflexion orthogonale par rapport à une droite de $\mathcal{E}$ et d'une translation parallèle à cette droite.

Les applications linéaires associées aux i) et i') de cette liste sont des i) de la liste précédente. Les i') sont les isométries affines sans point fixe, les i) avec point fixe.

En dimension plus grande, il est bon de connaître la structure des isométries vectorielles. Rappelons à ce sujet le résultat suivant.

Théorème 2 *Soit φ une isométrie d'un espace vectoriel euclidien E. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&&& \\ &&&&&& \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 &&&& \\ &&&&&& \sin\theta_1 & \cos\theta_1 &&&& \\ &&&&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&&&& \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ &&&&&&&&& \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}.$$

Ce théorème se montre par récurrence sur la dimension de E. On connaît les isométries en dimensions 1 et 2. La clé du pas de récurrence est de montrer qu'on peut trouver dans E un sous-espace stable par φ de dimension ≤ 2 ; l'orthogonal de ce sous-espace sera lui aussi stable, et on pourra considérer la restriction de φ à l'orthogonal. Si s admet 1 ou -1 comme valeur propre, pas de problème. Sinon, φ admet une valeur propre imaginaire λ (de module 1), avec un vecteur propre x sur $\mathbb{C}$ (pour complexifier, on peut fixer une base et identifier E à $\mathbb{R}^n$). Alors les vecteurs réels $\frac{x+\overline{x}}{2}$ et $\frac{x-\overline{x}}{2i}$ engendrent un plan stable de E.

Exercice 4 *Les groupes* $\mathrm{O}^+(n)$ *et* $\mathrm{Isom}^+(n)$ *sont connexes par arcs.*

Par exemple, les isométries d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 sont

1) l'identité,
2) les rotations autour d'une droite vectorielle,
3) les réflexions orthogonales par rapport à un plan vectoriel,
4) les anti-rotations, composés d'une rotation d'axe une droite vectorielle et d'une réflexion orthogonale par rapport au plan vectoriel orthogonal à l'axe de rotation.

Les numéros 1) et 2) sont directes, les numéros 3) et 4) indirectes. Les dimensions des sous espaces vectoriels fixes sont respectivement 3, 1, 2 et 0. À partir de là, on obtient grâce au théorème de forme réduite la description des isométries d'un espace affine euclidien de dimension 3 :

1) l'identité,
1') les translations (de vecteur non nul),
2) les rotations d'axe une droite de $\mathcal{E}$,
2') les vissages, composés d'une rotation d'axe une droite de $\mathcal{E}$ et d'une translation parallèle à cette droite,

3) les réflexions orthogonales par rapport à un plan de $\mathcal{E}$,

3') les symétries glissées, composés d'une réflexion orthogonale par rapport à un plan de $\mathcal{E}$) et d'une translation parallèle à ce plan,

4) les anti-rotations, composés d'une rotation d'axe une droite de $\mathcal{E}$ et d'une réflexion orthogonale par rapport à un plan orthogonal à l'axe de rotation.

Les conventions avec i) et i') sont les mêmes que celles employées plus haut en dimension 2.

3 Engendrement

Théorème 3 *Le groupe* $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ *est engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans de* $\mathcal{E}$*. Toute isométrie est produit d'au plus* $n+1$ *réflexions, où* $n = \dim(\mathcal{E})$*.*

On peut démontrer ce théorème à partir du théorème correspondant pour $O(E)$, qui dit que toute isométrie est produit d'au plus n réflexions orthogonales. Précisément, si d est la dimension de l'espace fixe de l'isométrie φ, alors φ est produit de $n-d$ réflexions, et pas de moins. Ceci se montre par récurrence sur $n-d$. Le cas $d=n$ est trivial. Supposons $d<n$, et le résultat montré pour les isométries dont l'espace fixe est de dimension $>d$. Soit φ une isométrie d'espace fixe F de dimension d. Soit $x \notin F$. Alors $H = (x-\varphi(x))^\perp$ est un hyperplan contenant F (ce dernier point se montre comme la propriété utilisée dans la preuve du théorème de forme réduite)) ; soit σ_H la réflexion orthogonale par rapport à H. Alors $\sigma_H\,\varphi$ est une isométrie dont l'espace fixe contient F et x et est donc de dimension $>d$. Ainsi $\sigma_H\,\varphi$ est produit d'au plus $n-d-1$ réflexions, et $\varphi = \sigma_H\,(\sigma_H\,\varphi)$ d'au plus $n-d$. Pour montrer qu'on ne peut pas faire avec moins que $n-d$, remarquer que l'espace fixe d'un composé $\sigma_{H_1}\cdots\sigma_{H_k}$ de k réflexions hyperplanes contient $H_1\cap\cdots\cap H_k$ qui est de dimension $\geq n-k$.

Venons-en maintenant aux isométries affines. Si f a un point fixe O, et d est la dimension de l'espace de ses points fixes, alors f est le produit de $n-d$ réflexions orthogonales, et l'on ne peut pas faire mieux. On peut en effet prendre O pour origine et se ramener à la situation vectorielle. Si f n'a pas de point fixe, alors on peut écrire $f = t_{\vec{u}}\,g$ avec g qui a des points fixes. La dimension d de l'espace des points fixes de g est égale à celle de l'espace fixe de $\vec{f}$, et est donc >0 (sinon, f aurait un point fixe). Comme $t_{\vec{u}}$ peut s'écrire comme produit de deux réflexions par rapport à de hyperplans orthogonaux à $\vec{u}$, f est produit d'au plus $n-d+2 \leq n+1$ réflexions.

Exercice 5 *Montrer que dans le dernier cas ci-dessus on ne peut pas faire avec moins de* $n-d+2$ *réflexions ([Fresnel], p. 151).*

Théorème 4 *Si* $\dim(\mathcal{E}) \geq 3$*, tout élément de* $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ *est un produit de renversements (symétries orthogonales par rapport à des sous-espaces de codimension deux).*

Contentons-nous d'expliciter le cas de la dimension 3 : une translation est le produit de deux retournement d'axes parallèles et orthogonaux à la direction de translation. Une rotation est le produit de deux retournements d'axes sécants qui engendrent un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Un vissage est le produit de deux retournements dont les axes ont pour perpendiculaire commune l'axe du vissage. Pour le cas général, avec des précisions sur le nombre de retournements, on peut voir [Fresnel], p. 150.

Exercice 6 *([Fresnel], p. 168-169) Soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ trois droites non parallèles deux à deux d'un espace affine euclidien de dimension 3, r_i le retournement d'axe Δ_i. Montrer que $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ont une perpendiculaire commune si et seulement si $r_1\, r_2\, r_3$ est un retournement.*
Théorème de Morley-Petersen : Soient D_1, D_2, D_3 trois droites non parallèles deux à deux d'un espace affine euclidien de dimension 3, D'_i la perpendiculaire commune à D_{i+1} et D_{i+2} (indices modulo 3). On suppose D_i et D'_i non parallèles, et soit D''_i leur perpendiculaire commune. Alors les trois droites D''_1, D''_2, D''_3 ont une perpendiculaire commune.

4 Structure de produit semi-direct

Nous allons ici, au moyen de l'exemple du groupe des isométries affines, aborder la notion de produit semi-direct sous différents aspects. On peut se reporter à [Perrin, Tauvel].

4.1 Produit semi-direct et action d'un groupe sur un autre

Fixons un point $O \in \mathcal{E}$. L'application $f \mapsto (\overrightarrow{Of(O)}, \vec{f})$ réalise une bijection de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ sur le produit cartésien $E \times \mathrm{O}(E)$. La bijection réciproque associe au couple $(\vec{u}, \varphi)$ l'isométrie affine $t_{\vec{u}}\, s^O(\varphi) \,:\, M \mapsto O + \varphi(\overrightarrow{OM}) + \vec{u}$. Cette bijection n'est toutefois pas un isomorphisme de groupes de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ sur le groupe produit $E \times \mathrm{O}(E)$. On a bien $\overrightarrow{g\,f} = \vec{g}\,\vec{f}$, mais par contre on a en général $\overrightarrow{O\,gf(O)} \neq \overrightarrow{Og(O)} + \overrightarrow{Of(O)}$. Par contre, on a $\overrightarrow{O\,gf(O)} = \overrightarrow{Og(O)} + \vec{g}(\overrightarrow{Of(O)})$. Autrement dit, si l'image de f est $(\vec{u}, \varphi)$ et celle de g est $(\vec{v}, \psi)$, alors celle de gf est $(\vec{v} + \psi(\vec{u}), \vec{g}\,\vec{f})$: la loi de composition sur les couples est "tordue" par l'action de $\mathrm{O}(E)$ sur E.

Si on préfère, on peut voir ceci de manière matricielle : une fois choisi un repère affine dans $\mathcal{E}$, on identifie ce dernier espace à $\mathbb{R}^n$. Si $f(X) = A\,X + B$, $g(X) = A'\,X + B'$ (A, A' dans $\mathrm{O}(n)$, B, B' dans $\mathbb{R}^n$), alors $g(f(X)) = (A'\,A)\,X + (A'\,B + B')$. La loi de composition sur les couples est

$$(B', A') \circ (B, A) = (B' + A'\,B, A'\,A)\ ,$$

tordue par l'action de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathbb{R}^n$.

De manière générale, supposons donné deux groupes H, K. On sait que le produit direct des deux groupes est le produit cartésien muni de la loi de composition $(h, k)(h', k') = (hh', kk')$. On va "tordre" cette loi de composition au moyen d'un homomorphisme $\rho : K \to \mathrm{Aut}(H)$ dans le groupe des automorphismes de H (se donner ρ, s'est se donner une action de K sur H par automorphismes de groupe).

Proposition - Définition. *La loi de composition interne définie sur le produit cartésien $H \times K$ par*

$$(h, k)(h', k') = (h\,\rho(k)(h), kk')$$

donne une structure de groupe. Ce groupe est appelé le produit semi-direct de H et K (tordu par ρ), et noté $H \rtimes_\rho K$.

La vérification du fait qu'on a bien un groupe se fait sans problème ; notons que l'élément neutre est $(1_H, 1_K)$ et que l'inverse de (h,k) est $(\rho(k)^{-1}(h^{-1}), k^{-1})$. L'usage est de noter $H \rtimes K$ en oubliant le ρ, ce qui est un abus. Si on prend pour ρ l'homomorphisme trivial qui envoie tout élément de K sur l'identité de H, on retombe sur le produit direct des deux groupes.

Revenons à notre exemple : le groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct $E \rtimes \mathrm{O}(E)$, tordu par l'action naturelle de $\mathrm{O}(E)$ sur E.

4.2 Produit semi-direct et suite exacte scindée

Nous avons vu dans la première section la suite exacte

$$1 \longrightarrow E \xrightarrow{i} \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \xrightarrow{p} \mathrm{O}(E) \longrightarrow 1 ,$$

où $i(\vec{u}) = t_{\vec{u}}$ et $p(f) = \vec{f}$.

On a un scindage de cette suite exacte ; expliquons de quoi il s'agit. Étant donné $O \in \mathcal{E}$, on a déjà défini $s^O : \mathrm{O}(E) \to \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ par

$$s^O(\varphi) : M \mapsto O + \varphi(\overrightarrow{OM}) .$$

Le fait que s^O soit un scindage de la suite exacte veut dire que $p\, s^O = \mathrm{Id}_{\mathrm{O}(E)}$.

Remarquons que si l'on identifie $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ au produit semi-direct $E \rtimes \mathrm{O}(E)$ par $f \mapsto (\overrightarrow{Of(O)}, \vec{f})$, alors $i(\vec{u}) = (\vec{u}, \mathrm{Id}_E)$, $p(\vec{u}, \varphi) = \varphi$ et $s^O(\varphi) = (\vec{0}, \varphi)$. De manière générale un produit semi-direct $H \rtimes K$ donne naissance à une suite exacte d'homomorphismes de groupes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H \rtimes K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 1 \\ & & h & \longmapsto & (h,1) & & & & \\ & & & & (h,k) & \longmapsto & k & & , \end{array}$$

scindée par l'homomorphisme $s : K \to H \rtimes K$ défini par $s(k) = (1,k)$.

Il reste pour boucler la boucle à expliquer comment passer d'une suite exacte scindée à un produit semi-direct. Le scindage est important, et il faut bien prendre garde au fait qu'une suite exacte d'homomorphismes de groupes ne peut pas toujours être scindée.

Exercice 7 *La suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

ne peut pas être scindée.

4.3 Produit semi-direct de sous-groupes

L'image de l'homomorphisme injectif $i : E \to \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ est le sous-groupe distingué des translations $\mathrm{T}(\mathcal{E})$. L'image du scindage $s^O : \mathrm{O}(E) \to \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ est le sous-groupe $\mathrm{Isom}^O(\mathcal{E})$ des isométries affines qui admettent O comme point fixe.

L'intersection des deux sous-groupes $\mathrm{T}(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Isom}^O(\mathcal{E})$ est réduite à l'élément neutre Id_E, car une translation ne peut fixer O que si elle est l'identité. Par ailleurs tout élément f de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ peut se décomposer en produit $f = t\,g$ avec $t \in \mathrm{T}(\mathcal{E})$ et $g \in \mathrm{Isom}^O(\mathcal{E})$: en effet $f = t_{\overrightarrow{Of(O)}}\, s^O(\vec{f})$.

De manière générale, considérons une suite exacte d'homomorphismes de groupes

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} K \longrightarrow 1$$

scindée par l'homomorphisme $s : K \to G$ ($p\,s = \mathrm{Id}_K$). Puisque les homomorphismes i et s sont injectifs, on peut identifier H au sous-groupe distingué $i(H)$ de G et K au sous-groupe $s(K)$ de G. On a alors :

1. $H \cap K = \{e\}$ (où e est l'élément neutre de G). En effet, si $h \in H \cap K$ alors $h = s(p(h))$ et $p(h) = e$ puisque $\ker(p) = H$.
2. $G = H\,K = \{h\,k : h \in H, k \in K\}$. En effet, soit $g \in G$, $k = s(p(g)) \in K$; alors $p(g\,k^{-1}) = e$ et donc $h = g\,k^{-1} \in H$. On obtient $g = h\,k$ avec $h \in H$ et $k \in K$.

On est maintenant en position de retrouver le produit semi-direct.

Proposition. *Soit G un groupe, $H \lhd G$ un sous-groupe distingué, $K \subset G$ un autre sous-groupe. Si $H \cap K = \{e\}$ et $G = H\,K$, alors l'application qui associe à $g \in G$ l'unique couple $(h, k) \in H \times K$ tel que $g = h\,k$ est un isomorphisme de G sur le produit semi-direct $H \rtimes K$ tordu par l'action de K sur H par conjugaison dans G ($\rho : K \to \mathrm{Aut}(H)$ est défini par $\rho(k)(h) = k\,h\,k^{-1}$).*

Dans la situation de la proposition, on dit habituellement que G est produit semi-direct de ses sous-groupes H et K, et on écrit $G = H \rtimes K$. Ce n'est pas génant puisque la proposition montre l'isomorphisme avec le produit semi-direct précédemment défini ; ici il n'y a pas d'ambiguïté quant à l'action de K sur H.

La démonstration de la proposition est facile. Remarquons d'abord que l'écriture $g = h\,k$ avec $h \in H$ et $k \in K$ est bien unique : si $h\,k = h_1\,k_1$, alors $(h_1)^{-1}h = k_1\,k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$ et donc $h = h_1$ et $k = k_1$. Par ailleurs, si $g = h\,k$ et $g' = h'\,k'$ alors

$$g\,g' = (h\,k)\,(h'\,k') = \big(h\,(k\,h'\,k^{-1})\big)\;(k\,k')\ ,$$

et on a $k\,h'\,k^{-1} \in H$ puisque H est distingué dans G.

Pour revenir à l'exemple qui nous guide, la conjugaison à l'intérieur de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ redonne bien l'action naturelle de $\mathrm{O}(E)$ sur E :

$$s^O(\varphi)\,t_{\vec{u}}\,(s^O(\varphi))^{-1} = t_{\varphi(\vec{u})}\ .$$

Références

[Audin] M. Audin : Géométrie. EDP Sciences, 2006.

[Berger] M. Berger : Géométrie. CEDIC/Fernand Nathan, 1977.

[Fresnel] J. Fresnel : Méthodes modernes en géométrie. Hermann, 1996.

[Perrin] D. Perrin : Cours d'Algèbre.

[Tauvel] P. Tauvel. Mathématiques Générales pour l'Agrégation. Masson.