

Promotion 2001
Année 3
Majeure 1
MAT553

MAJEURE DE MATHÉMATIQUES

Groupes et Symétries

**Groupes finis, Groupes et Algèbres de Lie,
Représentations**

Yvette Kosmann-Schwarzbach

Édition 2003

Table des matières

Introduction	7
1 Généralités sur les groupes	9
1 Rappel de quelques définitions	9
2 Exemples de groupes finis	10
2.1 Groupe cyclique d'ordre n	10
2.2 Groupe symétrique \mathfrak{S}_n	10
2.3 Groupe diédral	11
2.4 Autres exemples	11
3 Exemples de groupes infinis	11
4 Actions de groupes, classes de conjugaison	13
5 Références pour le chapitre 1	14
6 Exercices pour le chapitre 1	14
2 Représentations des groupes finis	17
1 Représentations	17
1.1 Généralités	17
1.2 Représentations irréductibles	18
1.3 Somme directe de représentations	19
1.4 Opérateurs d'entrelacement, lemme de Schur	19
2 Caractères et relations d'orthogonalité	21
2.1 Généralités	21
2.2 Caractère d'une représentation, relations d'orthogonalité	22
2.3 Table de caractères	25
2.4 Application à la décomposition des représentations	25
3 La représentation régulière	26
3.1 Définition	26
3.2 Caractère de la représentation régulière	27
3.3 Décomposition de la représentation régulière en composantes isoty- piques	27
3.4 Base de l'espace vectoriel des fonctions centrales	28
4 Opérateurs de projection	30
5 Représentations induites	31

6	Références pour le chapitre 2	32
7	Exercices pour le chapitre 2	32
3	Représentations des groupes topologiques compacts	37
1	Groupes topologiques compacts	37
2	Mesure de Haar	38
3	Représentations des groupes topologiques. Lemme de Schur	39
3.1	Généralités	40
3.2	Coefficients d'une représentation	40
3.3	Opérateurs d'entrelacement	41
3.4	Opérations sur les représentations	41
3.5	Lemme de Schur	42
4	Représentations des groupes topologiques compacts	43
4.1	Complète réductibilité	43
4.2	Relations d'orthogonalité	43
5	Résumé du chapitre 3	45
6	Références pour le chapitre 3	45
7	Exercices pour le chapitre 3	46
4	Groupes et algèbres de Lie	49
1	Algèbres de Lie	49
1.1	Définition et exemples	49
1.2	Morphismes	51
1.3	Relations de commutation, constantes de structure	51
1.4	Formes réelles	51
1.5	Représentations d'algèbres de Lie	51
2	Rappels sur l'application exponentielle	52
3	Sous-groupes à un paramètre de $GL(n, \mathbb{K})$	55
4	Groupes de Lie	56
5	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	57
6	Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie	61
6.1	Différentielle d'un morphisme de groupes de Lie	61
6.2	Différentielle d'une représentation d'un groupe de Lie	62
6.3	La représentation adjointe	64
7	Références pour le chapitre 4	64
8	Exercices pour le chapitre 4	65
5	Les groupes de Lie $SU(2)$ et $SO(3)$	69
1	Les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$	69
1.1	Bases de $\mathfrak{su}(2)$	69
1.2	Bases de $\mathfrak{so}(3)$	71
1.3	Bases de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	72
2	Le morphisme de revêtement de $SU(2)$ sur $SO(3)$	72

2.1	Le groupe $SO(3)$	72
2.2	Le groupe $SU(2)$	74
2.3	Projection de $SU(2)$ sur $SO(3)$	75
3	Références pour le chapitre 5	76
4	Exercices pour le chapitre 5	77
6	Les représentations de $SU(2)$ et $SO(3)$	79
1	Correspondance bijective entre représentations de \mathfrak{g} et de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$	79
2	Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	80
2.1	Les représentations D^j	80
2.2	Opérateur de Casimir	82
2.3	Hermiticité des opérateurs J_3 et J^2	82
3	Représentations de $SU(2)$	84
3.1	Les représentations \mathcal{D}^j	84
3.2	Caractère de \mathcal{D}^j	87
3.3	Caractère de $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$	87
3.4	Formule de Clebsch-Gordan	88
4	Représentations de $SO(3)$	88
5	Références pour le chapitre 6	89
6	Exercices pour le chapitre 6	89
7	Les représentations de $SU(3)$ et les quarks	91
1	Rappels sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, représentations de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et de $SU(3)$	91
1.1	Rappels sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	91
1.2	Cas de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$	91
1.3	Les bases (I_3, Y) et (I_3, T_8) de \mathfrak{h}	93
1.4	Représentations de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et de $SU(3)$	94
2	Représentation adjointe, racines	94
3	Représentation standard (fondamentale) et sa contragrédiente	95
3.1	Représentation standard (fondamentale)	95
3.2	Contragrédiente de la représentation standard	96
4	Poids maximal d'une représentation de dimension finie	97
4.1	Poids maximal	97
4.2	Les poids comme combinaisons linéaires des λ_i	98
4.3	Représentations de dimension finie, poids	99
4.4	Autre exemple : la représentation 6	100
4.5	Encore un exemple : la représentation 10	101
5	Produits tensoriels de représentations	102
6	"The eightfold way"	104
6.1	Baryons ($B = 1$)	105
6.2	Mésons ($B = 0$)	106
6.3	Résonances baryoniques	106

7	Les quarks et les antiquarks	107
8	Références pour le chapitre 7	107
9	Exercices pour le chapitre 7	108
8	Problèmes corrigés	109
1	Représentations du groupe symétrique \mathfrak{S}_3	109
2	Le groupe $O(2)$	110
3	Représentations irréductibles de $SU(2) \times SU(2)$	113
4	Opérateurs de projection	120
5	Symétries du C_{60}	127
	Bibliographie	137
	Index	139

Introduction

Les symétries des figures géométriques, des cristaux et de tous les autres objets de la physique macroscopique font l'objet depuis des siècles d'observations et d'études. En termes modernes, les symétries d'un objet donné forment un groupe. La notion abstraite de groupe n'a émergé que lentement vers le milieu du dix-neuvième siècle. Mais depuis, quel essor ! Avec Sophus Lie (1842-1899), Wilhelm Killing (1847-1923), Élie Cartan (1869-1951), Issai Schur (1875-1941), Hermann Weyl (1885-1955) et beaucoup, beaucoup d'autres, la théorie des groupes a pris une extension énorme, et ses applications à la mécanique quantique et à la théorie des particules élémentaires se sont développées tout au long du vingtième siècle. Si cette histoire vous intéresse, il faut lire l'introduction au livre de Shlomo Sternberg cité en référence, et consulter les trois livres récents, *Pioneers of Representation Theory* par Charles Curtis (American Mathematical Society, 1999), *Emergence of the Theory of Lie Groups* par Thomas Hawkins (Springer-Verlag, 2000) et *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups* par Armand Borel (American Mathematical Society, 2001)¹.

L'objet de ce cours est d'introduire et d'illustrer les notions les plus fondamentales concernant les groupes finis et, plus généralement, les groupes topologiques compacts, d'introduire la notion d'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, tout au moins dans le cas des groupes de Lie linéaires (sous-groupes fermés des groupes linéaires), d'étudier en détails les groupes de Lie $SO(3)$ et $SU(2)$ et, ensuite, le groupe $SU(3)$ avec application à la théorie des quarks. C'est la notion de représentation d'un groupe, c'est-à-dire action sur un espace vectoriel par transformations linéaires, en particulier la notion de représentation irréductible, qui joue le rôle fondamental.

Au chapitre 1, on rappelle quelques généralités sur les groupes, et l'on donne des exemples de groupes finis et infinis.

Pour étudier les représentations des groupes finis, on exploite les propriétés des caractères de ces représentations, c'est-à-dire des traces des transformations linéaires qui définissent la représentation considérée. C'est ce qui est fait au chapitre 2.

Le chapitre 3 étend aux groupes compacts certains résultats démontrés pour les groupes finis, grâce à l'existence d'une mesure invariante sur le groupe, la mesure de Haar.

Au chapitre 4, on aborde l'étude de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire, c'est-à-dire l'ensemble des générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre, muni du commutateur des matrices, et l'on étudie le lien entre les représentations d'un groupe

¹Voir aussi les résumés critiques de ces deux derniers ouvrages dans la *Gazette des Mathématiciens*, 95 (janvier 2003), p. 97-100 et 100-102.

de Lie et celles de son algèbre de Lie.

Au chapitre 5, on étudie les groupes de Lie $SO(3)$ et $SU(2)$ et, au chapitre 6, l'on détermine toutes leurs représentations irréductibles.

Au chapitre 7, on commence l'étude des représentations irréductibles de $SU(3)$ sur des exemples, et l'on montre que la théorie des quarks apparaît comme conséquence des propriétés mathématiques du groupe de symétries. C'est dans ce chapitre que l'on introduit les notions de racines et de poids qui sont plus généralement à la base de la théorie des représentations des algèbres de Lie dites semi-simples. Pour les applications à la physique quantique, on pourra consulter le cours d'André Rougé ou celui de Jean-Paul Blaizot et Jean-Claude Tolédano cités en référence.

Je remercie chaleureusement Alain Guichardet pour ses nombreuses remarques sur ces notes, qu'il a bien voulu lire au fur et à mesure de leur écriture et relire encore lors de la révision 2003, ainsi qu'André Rougé pour ses précisions sur l'histoire de "la voie octuple" et ses critiques judicieuses, et Nicole Berline et Pascale Harinck pour leurs encouragements. Je suis reconnaissante à Claudine Harmide qui a tapé une première version de ce cours d'après mes notes manuscrites. Enfin, j'ai profité des remarques de deux promotions de polytechniciens et polytechniciennes de la "majeure 1 de mathématiques" et je les en remercie vivement.

Palaiseau, Juin 2003

Chapitre 1

Généralités sur les groupes

1 Rappel de quelques définitions

Un *groupe* est un ensemble muni d'une loi de composition associative, possédant un élément neutre et telle que chaque élément possède un inverse. L'élément neutre, encore appelé élément unité, est diversement noté e , 1 ou souvent I s'il s'agit d'un groupe de matrices.

Un groupe est dit *commutatif* ou *abélien* si la loi de composition est commutative. Dans ce cas la composition est en général notée $+$ et l'élément neutre est en général noté 0 .

On notera $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini, X . L'*ordre d'un groupe fini*, G , est le nombre, $|G|$, d'éléments du groupe. Plus généralement, Un élément $g \in G$ est dit d'ordre n ($n \geq 2$) si

$$g^n = e \text{ et } g^m \neq e \text{ pour } 1 \leq m \leq n - 1 .$$

Exemple : Une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ est un élément d'ordre n du groupe des rotations du plan.

Un *sous-groupe* H de G est un sous-ensemble tel que $e \in H$, $g \in H$ implique $g^{-1} \in H$, g et $g' \in H$ implique $gg' \in H$.

Le *sous-groupe engendré* par un sous-ensemble d'un groupe G est le plus petit sous-groupe de G contenant ce sous-ensemble.

Un groupe est dit *cyclique* s'il est engendré par un seul élément. Un tel groupe est donc abélien.

Soit H un sous-groupe de G . Les *classes à gauche* suivant H , sont les gH , $g \in G$. L'ensemble des classes à gauche suivant H est l'ensemble quotient noté G/H . Les *classes à droite* suivant H , sont les Hg , $g \in G$. L'ensemble des classes à droite suivant H est l'ensemble quotient noté $H \backslash G$.

Le nombre de classes à gauche suivant H est égal au nombre de classes à droite suivant H . De plus

Théorème 1.1 (Théorème de Lagrange) *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Alors, $|H|$ divise $|G|$ et*

$$|G|/|H| = |H \backslash G| = |G/H| .$$

L'entier $|G|/|H|$ s'appelle l'*indice* de H dans G .

Un *morphisme* de groupes $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ est une application d'un groupe G_1 dans un groupe G_2 telle que $\forall g, g' \in G_1, \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$, ce qui implique $\varphi(e_1) = e_2$, où e_i est l'élément neutre de G_i ($i = 1, 2$), et $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$.

Un *isomorphisme de groupes* est une bijection qui est de plus un morphisme. Son inverse est alors aussi un morphisme.

Un *automorphisme de groupe* est un isomorphisme d'un groupe sur lui-même. En particulier, pour chaque $g \in G$ on appelle *automorphisme intérieur* ou *conjugaison* défini(e) par g l'isomorphisme, \mathcal{C}_g , de G ,

$$\mathcal{C}_g : h \mapsto ghg^{-1}.$$

Un sous-groupe H de G est dit *distingué* ou *normal* ou *invariant* s'il est stable par conjugaison par tous les éléments de G . Le noyau d'un morphisme est un sous-groupe distingué. En effet,

$$\text{si } \varphi(h) = e, \text{ alors } \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) = e.$$

Le *centre* de G est, par définition, l'ensemble $\{h \in G | \forall g \in G, hg = gh\}$. Le centre de G est un sous-groupe distingué de G .

Si G_1 et G_2 sont des groupes, leur *produit direct* est le produit $G_1 \times G_2$ avec la loi de groupe $(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1g'_1, g_2g'_2)$.

Pour la notion de *produit semi-direct* de groupes, voir l'exercice 4.

2 Exemples de groupes finis

2.1 Groupe cyclique d'ordre n

Les groupes suivants sont isomorphes et sont appelés *groupe cyclique* d'ordre n :

- $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en particulier \mathbb{Z}_2 , noté additivement $\{0, 1\}$ ou multiplicativement $\{1, -1\}$.
- Le groupe des rotations du plan de centre O , d'angle $\frac{2k\pi}{n}, 0 \leq k \leq n-1$, pour la composition.
- Le groupe des nombres complexes, $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} | 0 \leq k \leq n-1\}$, pour la multiplication.
- Le sous-groupe $\{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ si g est un élément d'ordre n dans un groupe G .

2.2 Groupe symétrique \mathfrak{S}_n

Le groupe des permutations d'un ensemble de cardinal n est noté \mathfrak{S}_n et appelé *groupe symétrique sur n éléments*. L'ordre de \mathfrak{S}_n est $n!$.

Tout élément de \mathfrak{S}_n s'écrit comme un produit de transpositions. À tout élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on associe le nombre égal à $\pm 1 \in \{1, -1\} = \mathbb{Z}_2$ suivant la parité du nombre de transpositions (cette parité est indépendante de la décomposition). Ce nombre est noté $(-1)^\sigma$ et appelé *signature* de σ . L'application $\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto (-1)^\sigma \in \mathbb{Z}_2$ est un morphisme de groupes.

Le *groupe alterné* \mathfrak{A}_n est le noyau du morphisme de signature. C'est un sous-groupe distingué d'indice 2 de \mathfrak{S}_n .

2.3 Groupe diédral

Le *groupe diédral*, \mathcal{D}_n , est le groupe des rotations et symétries orthogonales du plan conservant un polygone régulier à n sommets. C'est un sous-groupe d'ordre $2n$ de \mathfrak{S}_n . (Certains auteurs emploient la notation \mathcal{D}_{2n} pour ce groupe.)

2.4 Autres exemples

On désigne par $O(3)$ le groupe des isométries de \mathbb{R}^3 , et par $SO(3)$ le groupe des rotations de \mathbb{R}^3 , qui est le sous-groupe distingué de $O(3)$, noyau de l'application *déterminant*. La classification des sous-groupes finis de $SO(3)$ et de $O(3)$ est connue (voir par exemple [Sternberg, pages 27-47]). Pour chaque polyèdre régulier (tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre (fullerènes), dodécaèdre), on définit les groupes de symétries correspondants, c'est-à-dire le sous-groupe de $O(3)$ et le sous-groupe de $SO(3)$ laissant le solide globalement invariant. Ce sont des groupes finis, appelés *groupes cristallographiques*. Le second est d'indice 2 dans le premier.

	$SO(3)$	$O(3)$
tétraèdre	\mathfrak{A}_4 ordre 12	\mathfrak{S}_4 ordre 24
cube	\mathfrak{S}_4 ordre 24	$\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ordre 48
octaèdre	\mathfrak{S}_4 ordre 24	$\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ordre 48
icosaèdre	\mathfrak{A}_5 ordre 60	$\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$ ordre 120
dodécaèdre	\mathfrak{A}_5 ordre 60	$\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}_2$ ordre 120

3 Exemples de groupes infinis

Parmi les groupes ayant une infinité d'éléments, il y a des *groupes discrets*, par exemple, le groupe abélien \mathbb{Z} . Mais nous nous intéresserons surtout à des groupes dits "groupes continus", dont voici des exemples.

Désignons par \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On désigne par $GL(n, \mathbb{K})$ le groupe des isomorphismes linéaires de \mathbb{K}^n , appelé *groupe linéaire* en dimension n . On considère divers sous-groupes de celui-ci. On désigne par tA la transposée d'une matrice, A . Une barre désigne la conjugaison complexe.

- groupe spécial linéaire,

$$SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\} .$$

- groupe orthogonal,

$$O(n, \mathbb{K}) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A {}^tA = I\} .$$

On appelle plus particulièrement *groupe orthogonal*, le groupe orthogonal réel, et on le note simplement $O(n)$.

- groupe spécial orthogonal,

$$SO(n, \mathbb{K}) = \{A \in O(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\} .$$

On appelle plus particulièrement *groupe spécial orthogonal*, le groupe spécial orthogonal réel, et on le note simplement $\text{SO}(n)$.

Plus généralement, si $p + q = n$, on désigne par J_{pq} la matrice diagonale comportant sur la diagonale p fois 1 suivi de q fois -1 , et l'on pose

$$\text{O}(p, q) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A J_{pq} {}^t A = J_{pq}\}$$

et

$$\text{SO}(p, q) = \{A \in \text{O}(p, q) \mid \det A = 1\} .$$

En particulier $\text{O}(3, 1)$, qui est le groupe des isométries de l'espace de Minkowski, est appelé le *groupe de Lorentz*.

- groupe unitaire,

$$\text{U}(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A {}^t \bar{A} = I\} .$$

La matrice ${}^t \bar{A}$ est l'adjointe de la matrice A , encore notée A^* .

- groupe spécial unitaire,

$$\text{SU}(n) = \{A \in \text{U}(n) \mid \det A = 1\} .$$

Définition 3.1 *On appelle groupe topologique un groupe G qui est un espace topologique séparé tel que $G \times G \rightarrow G$, $(g, g') \mapsto gg'$ et $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ sont des applications continues.*

Le groupe linéaire muni de sa topologie usuelle (comme ouvert de l'espace \mathbb{K}^{n^2}) est un groupe topologique localement compact, et chacun des groupes ci-dessus est un sous-groupe fermé d'un groupe linéaire. Les groupes $\text{O}(n)$ et $\text{U}(n)$ ainsi que $\text{SO}(n)$ et $\text{SU}(n)$ sont compacts.

Nous donnons ci-dessous la définition des groupes de Lie réels et complexes, qui fait intervenir la notion de *variété*, version abstraite de la notion de sous-variété d'un espace cartésien (voir, par exemple, [Marsden-Ratiu, page 121] ou [Rossmann, page 134]).

Un *groupe de Lie (réel)* de dimension (réelle) N est un groupe qui est une variété (réelle) de classe C^∞ de dimension N telle que le produit et le passage à l'inverse sont des applications différentiables de classe C^∞ .

Un *groupe de Lie complexe* de dimension complexe N est un groupe qui est une variété analytique complexe de dimension complexe N telle que le produit et le passage à l'inverse sont des applications analytiques.

On montre que les sous-groupes fermés de $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ sont des groupes de Lie réels appelés *groupes de Lie linéaires*. Ce sont les seuls dont nous parlerons et nous les appellerons simplement *groupes de Lie*. Tous les exemples énumérés ci-dessus sont donc des exemples de groupes de Lie. Il y a d'autres exemples de groupes de Lie : les groupes symplectiques, $\text{Sp}(n)$ et $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$, les groupes spinoriels, etc. Dans ce cours, nous ferons une étude détaillée des groupes de Lie $\text{SO}(3)$ et $\text{SU}(2)$.

Remarque : Tout groupe de Lie complexe de dimension complexe N est un groupe de Lie réel de dimension réelle $2N$. Certains sous-groupes fermés de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ sont aussi des groupes de Lie complexes. C'est le cas pour $\text{SL}(n, \mathbb{C})$, $\text{O}(n, \mathbb{C})$ et $\text{SO}(n, \mathbb{C})$, mais pas pour $\text{U}(n)$ ni $\text{SU}(n)$ qui sont seulement des groupes de Lie réels.

4 Actions de groupes, classes de conjugaison

Définition 4.1 Soit G un groupe et M un ensemble. Une action de G sur M est une application $\alpha : G \times M \rightarrow M$, notée $(g, m) \mapsto g.m$, telle que $\forall m \in M, e.m = m$ et $\forall g, g' \in G, g.(g'.m) = gg'.m$. On dit alors que G agit sur M .

En d'autres termes, α définit un morphisme de groupes de G dans le groupe des bijections de M sur lui-même.

Si G est un groupe topologique et si M est un espace topologique, on supposera l'action α de G sur M continue. (Si G est un groupe de Lie et si M est une variété de classe C^∞ , on supposera de même l'application α différentiable de classe C^∞ .)

L'orbite de $m \in M$ sous l'action de G est l'ensemble $\{g.m \mid g \in G\}$. Les orbites définissent une partition de M .

Exemples :

- L'action triviale de G sur un ensemble, M , consiste à envoyer tout élément du groupe sur l'application identique de M sur lui-même. Dans ce cas, les orbites sont les points de M .

- Dans l'action de $G = O(2)$ sur la sphère unité, $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$, par rotations d'axe Oz , l'orbite de $m \in S^2$ est un point si m est le pôle nord ou le pôle sud, c'est un petit cercle d'axe Oz (sous-variété de dimension 1) dans tous les autres cas.

- L'action de G sur G par translation à gauche (resp., droite) est l'action $(g, m) \in G \times G \mapsto gm$ (resp., $(g, m) \in G \times G \mapsto mg^{-1}$). En d'autres termes, à $g \in G$, on associe la translation à gauche (resp., droite) l_g (resp., $r_{g^{-1}}$) dans G , ce qui définit bien un morphisme de G dans les bijections de G sur G (mais non dans les automorphismes de G).

Remarquons que la classe à gauche de $g \in G$, gH , suivant un sous-groupe H de G est l'orbite de g sous l'action de $H \subset G$ agissant par translation à droite.

- L'action de G sur G par conjugaison,

$$C_g(h) = ghg^{-1}$$

est une action par automorphismes. L'orbite de $g_0 \in G$,

$$C_{g_0} = \{gg_0g^{-1} \mid g \in G\},$$

est appelée la *classe de conjugaison* de g_0 . En particulier, la classe de conjugaison de e est $\{e\}$.

- Si G est abélien, la classe de conjugaison de $g \in G$ est $\{g\}$. C'est le cas pour $SO(2)$ par exemple.
- Dans \mathfrak{S}_n , le nombre de classes de conjugaison est le nombre de partitions de n (voir exercice 3).
- Dans $GL(n, \mathbb{K})$, la classe de conjugaison d'une matrice A est l'ensemble $\{PAP^{-1} \mid P \in GL(n, \mathbb{K})\}$ des matrices qui lui sont semblables.
- Dans $SO(3)$, deux rotations sont conjuguées par une rotation si et seulement si elles ont même angle. Les classes de conjugaison sont en correspondance bijective avec

le cercle unité S^1 . En effet, toute rotation peut s'écrire par changement de base orthonormée directe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

5 Références pour le chapitre 1

[Broué], [Rauch], [Serre], [Simon], [Sternberg].

6 Exercices pour le chapitre 1

Exercice 1. *Théorème de Lagrange et applications.*

a) Montrer que dans un groupe fini, l'ordre de tout sous-groupe divise l'ordre du groupe.

b) Montrer que dans un groupe fini G d'ordre n , pour tout élément $a \in G$, $a^n = e$. En déduire que toute représentation de dimension 1 de G prend ses valeurs dans les racines n^{e} de l'unité.

Exercice 2. *Centre de \mathfrak{S}_n .*

Montrer que pour $n \geq 3$, le centre du groupe symétrique \mathfrak{S}_n est réduit à l'identité.

Exercice 3. *Classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n .*

Montrer que dans \mathfrak{S}_n deux éléments sont conjugués si et seulement s'ils ont la même décomposition en cycles. En déduire que le nombre de classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n est le nombre de partitions de l'entier n , c'est-à-dire de suites d'entiers, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$, tels que $n \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$.

Exercice 4. *Produits semi-directs de groupes.*

Si un groupe H agit sur un groupe N par automorphismes de groupe, on définit sur $G = N \rtimes H$ la multiplication

$$(n, h)(n', h') = (n(h.n'), hh') .$$

Vérifier que G est un groupe, que l'on note $N \rtimes H$. Quel est l'inverse de (n, h) dans G ? Vérifier que N est un sous-groupe normal de G .

Exercice 5. *Groupe des isométries du plan.*

Montrer que le groupe $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ agit par automorphismes de groupe sur $\text{SO}(2)$ par $\varepsilon.g = g^\varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$. Montrer que $\text{O}(2)$ est le produit semi-direct $\text{SO}(2) \rtimes \{1, -1\}$, c'est-à-dire que $(g, \varepsilon)(g', \varepsilon') = (gg'^\varepsilon, \varepsilon\varepsilon')$. Déterminer les classes de conjugaison de $\text{SO}(2)$ et de $\text{O}(2)$.

Exercice 6. *Le groupe \mathfrak{S}_3 comme produit semi-direct.*

Montrer que le groupe \mathfrak{S}_3 est produit semi-direct du groupe alterné \mathfrak{A}_3 par \mathbb{Z}_2 . Le groupe \mathfrak{S}_n est-il produit semi-direct du groupe alterné \mathfrak{A}_n par \mathbb{Z}_2 , pour $n \geq 3$?

Exercice 7. *Le groupe diédral \mathcal{D}_n .*

On considère le groupe diédral \mathcal{D}_n , d'ordre $2n$, groupe des rotations et des symétries du plan qui laissent invariant un polygone régulier à n sommets.

a) Montrer que $\mathcal{D}_n = \Gamma_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ où Γ_n est le groupe cyclique d'ordre n et où le groupe $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ agit sur Γ_n par $\varepsilon.g = g^\varepsilon$, où $\varepsilon = \pm 1$.

b) Montrer que \mathcal{D}_n est isomorphe à \mathfrak{S}_n si et seulement si $n = 3$.

c) L'ensemble $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, avec la loi de multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, est un groupe, appelé groupe des quaternions. Montrer que \mathcal{D}_4 n'est pas isomorphe au groupe des quaternions.

Exercice 8. *Exemples de produits semi-directs de groupes.*

Chercher les définitions du groupe de Poincaré et du groupe de Galilée. Montrer que chacun d'eux est un produit semi-direct.

Chapitre 2

Représentations des groupes finis

En mathématiques et en physique, la notion de représentation d'un groupe est fondamentale. Il s'agit d'étudier les différentes manières de faire agir des groupes sur des espaces vectoriels par des *transformations linéaires*.

Dans ce chapitre, nous supposons que les groupes considérés sont finis, et nous nous limiterons au cas où les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels complexes, de dimension finie, sauf mention contraire explicite.

1 Représentations

1.1 Généralités

Si E est un espace vectoriel sur \mathbb{C} , on désigne par $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des isomorphismes \mathbb{C} -linéaires de E .

Définition 1.1 Une représentation d'un groupe G est la donnée d'un espace vectoriel, E , et d'un morphisme de groupes, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(E)$.

Donc, pour tous $g, g' \in G$,

$$\rho(gg') = \rho(g)\rho(g') \text{ , } \rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1} \text{ , } \rho(e) = \mathrm{Id}_E \text{ .}$$

La dimension de E s'appelle la *dimension de la représentation*. On désigne une telle représentation par (E, ρ) ou simplement ρ .

Si en particulier, $E = \mathbb{C}^n$, on dit que la représentation est une *représentation matricielle* de dimension n .

On appelle *représentation triviale* toute représentation telle que $\rho(g) = \mathrm{Id}_E$ pour tout $g \in G$.

Exemple 1.2 (de représentation d'un groupe non abélien) Soit $t \in \mathfrak{S}_3$ la transposition $123 \rightarrow 132$ et c la permutation circulaire $123 \rightarrow 231$ qui engendrent \mathfrak{S}_3 . On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On peut représenter \mathfrak{S}_3 dans \mathbb{C}^2 en posant

$$\rho(e) = I \text{ , } \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ , } \rho(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix} \text{ .}$$

Définition 1.3 Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E . On dit que la représentation, ρ , est unitaire si $\rho(g)$ est unitaire pour tout g , c'est-à-dire,

$$\forall g \in G, \forall x, y \in E, (\rho(g)x | \rho(g)y) = (x | y) .$$

Une représentation (E, ρ) est dite *unitarisable* s'il existe un produit scalaire sur E tel que ρ soit unitaire.

Théorème 1.4 Toute représentation d'un groupe fini est unitarisable.

Démonstration: Soit (E, ρ) une représentation d'un groupe fini, G , et soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E . Considérons

$$(x | y)' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)x | \rho(g)y) ,$$

qui est un produit scalaire sur E . En effet, supposons $(x | x)' = 0$, c'est-à-dire $\sum_{g \in G} (\rho(g)x | \rho(g)x) = 0$. Alors, pour tout $g \in G$, $(\rho(g)x | \rho(g)x) = 0$ et, en particulier $(x | x) = 0$, d'où $x = 0$.

Ce produit scalaire sur E est invariant par ρ . En effet,

$$\begin{aligned} (\rho(g)x | \rho(g)y)' &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\rho(h)\rho(g)x | \rho(h)\rho(g)y) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\rho(hg)x | \rho(hg)y) = (x | y)' , \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation fondamentale, valable pour toute fonction φ sur G ,

$$(2.1) \quad \forall g \in G, \sum_{h \in G} \varphi(gh) = \sum_{h \in G} \varphi(hg) = \sum_{k \in G} \varphi(k) .$$

Donc ρ est une représentation unitaire de G dans $(E, (\cdot | \cdot)')$.

1.2 Représentations irréductibles

Soit (E, ρ) une représentation de G . Un sous-espace vectoriel, $F \subset E$, est dit *invariant* par ρ (ou par G , si le nom de la représentation est sous-entendu) si, $\forall g \in G, \rho(g)F \subset F$, ce qui entraîne $\rho(g)F = F$. On peut alors parler de la représentation ρ restreinte à F qui est une représentation de G dans F . On la note $\rho|_F$. Une telle représentation restreinte à un sous-espace invariant s'appelle aussi une *sous-représentation*.

Définition 1.5 Une représentation (E, ρ) de G est dite irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels de E invariants par ρ sont $\{0\}$ et E tout entier.

La représentation de dimension 2 de \mathfrak{S}_3 définie dans l'exemple 1.2 est irréductible, car les sous-espaces propres de $\rho(t)$ et de $\rho(c)$ sont d'intersection nulle.

Toute représentation irréductible, (E, ρ) , d'un groupe fini, G , est de dimension finie. En effet, soit $x \in E$. Le sous-ensemble $\{\rho(g)x \mid g \in G\}$ étant fini, il engendre un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Si $x \neq 0$, ce sous-espace vectoriel de E n'est pas réduit à $\{0\}$. Comme il est stable par ρ , il coïncide avec E , qui est donc de dimension finie.

1.3 Somme directe de représentations

Définition 1.6 Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations de G . Alors $(E_1 \oplus E_2, \rho_1 \oplus \rho_2)$, où $(\rho_1 \oplus \rho_2)(x_1, x_2) = (\rho_1(x_1), \rho_2(x_2))$, est une représentation de G appelée somme directe des représentations (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) .

Évidemment une somme directe de représentations de dimensions strictement positives, même irréductibles, n'est jamais irréductible. Pour des représentations matricielles, ρ_1 et ρ_2 , les matrices de la représentation somme directe de ρ_1 et ρ_2 sont des matrices diagonales par blocs,

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, on définit par récurrence la somme directe de k représentations, $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$. Si, dans une somme directe, ρ_1 est répétée m_1 fois, ρ_2 est répétée m_2 fois, ..., ρ_ℓ est répétée m_ℓ fois, on appellera m_i la *multiplicité* de ρ_i , et l'on écrira, $m_i \rho_i = \rho_i \oplus \cdots \oplus \rho_i$ (m_i fois), d'où l'écriture

$$m_1 \rho_1 \oplus m_2 \rho_2 \oplus \cdots \oplus m_\ell \rho_\ell,$$

où $m_i \rho_i$ est appelée la *composante isotypique* de type ρ_i .

Une représentation est dite *complètement réductible* si elle est somme directe de représentations irréductibles.

Lemme 1.7 Soit ρ une représentation unitaire de G dans $(E, (\cdot | \cdot))$. Si $F \subset E$ est invariant par ρ , alors $F^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in F, (x|y) = 0\}$ est aussi invariant par ρ .

Démonstration : Soit $y \in F^\perp$. Alors, $\forall x \in F, (x|\rho(g)y) = (\rho(g^{-1})x|y) = 0$, puisque F est invariant par ρ . Donc $\rho(g)y \in F^\perp$.

Théorème 1.8 (Théorème de Maschke) Toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est complètement réductible.

En fait, ce théorème est vrai sous des hypothèses plus générales (voir l'étude des groupes compacts au chapitre 3).

Démonstration : Soit (E, ρ) une représentation de G . D'après le théorème 1.4, on peut la supposer unitaire. Si ρ n'est pas irréductible, soit F un sous-espace vectoriel de E invariant par ρ , tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Alors, $E = F \oplus F^\perp$, où F (par hypothèse) et F^\perp (d'après le lemme 1.7) sont invariants par ρ , et $\dim F < E$, $\dim F^\perp < E$. Par récurrence sur la dimension de E , on obtient le résultat.

1.4 Opérateurs d'entrelacement, lemme de Schur

Définition 1.9 Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations de G . On dit qu'une application linéaire, $T : E_1 \rightarrow E_2$, entrelace ρ_1 et ρ_2 si

$$\forall g \in G, \rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g),$$

et T s'appelle alors opérateur d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2 .

La définition exprime la commutativité du diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 \\ \rho_1(g) \downarrow & & \downarrow \rho_2(g) \\ E_1 & \xrightarrow{T} & E_2 \end{array}$$

Les expressions suivantes sont diversement utilisées pour exprimer cette même propriété :

- T est un opérateur d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2 ,
- T est équivariant pour ρ_1 et ρ_2 ,
- T est un morphisme de G -espaces vectoriels,
- T est un G -morphisme,
- $T \in \text{Hom}_G(E_1, E_2)$.

Si $E_1 = E_2 = E$ et si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, un opérateur qui entrelace ρ_1 et ρ_2 est simplement un opérateur qui *commute* à ρ .

S'il existe un opérateur d'entrelacement *bijectif*, T , entre ρ_1 et ρ_2 , les représentations ρ_1 et ρ_2 sont dites *équivalentes*. Alors,

$$\forall g \in G, \rho_2(g) = T \circ \rho_1(g) \circ T^{-1}.$$

L'équivalence au sens précédent est une relation d'équivalence sur les représentations, d'où la notion de *classe d'équivalence de représentations*.

Des représentations (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) sont équivalentes si et seulement s'il existe une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2 telles que, pour tout $g \in G$, la matrice de $\rho_1(g)$ dans la base B_1 soit égale à la matrice de $\rho_2(g)$ dans la base B_2 . En particulier, si des représentations (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) sont équivalentes, alors E_1 est isomorphe à E_2 .

Pour des représentations matricielles, on obtient donc des *matrices semblables* : si $E_1 = E_2 = \mathbb{C}^n$, et si ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes, alors les matrices $\rho_2(g)$ et $\rho_1(g)$ sont semblables, avec même matrice de passage pour tout g .

Si ρ_0 est une représentation de G dans E , le choix d'une base (e_i) de E donne une représentation matricielle (\mathbb{C}^n, ρ) ; par changement à une base (e'_i) avec la matrice de passage T , on obtient la représentation équivalente (\mathbb{C}^n, ρ') ,

$$\rho'(g) = T \circ \rho(g) \circ T^{-1}.$$

Lemme 1.10 *Si T entrelace ρ_1 et ρ_2 , le noyau de T , $\ker T$, est invariant par ρ_1 , et l'image de T , $\text{Im } T$, est invariante par ρ_2 .*

Démonstration : Si $Tx = 0, x \in E_1$, alors $T(\rho_1(g)x) = \rho_2(g)(Tx) = 0$. Donc $\ker T$ est un sous-espace de E_1 , invariant par ρ_1 . Soit $y \in \text{Im } T$. Il existe $x \in E_1$ tel que $y = Tx$. Alors $\rho_2(g)y = \rho_2(g)(Tx) = T(\rho_1(g)x)$, donc $\text{Im } T$ est un sous-espace de E_2 , invariant par ρ_2 .

Lemme 1.11 *Si T commute à ρ , tout sous-espace propre de T est invariant par ρ .*

Démonstration : En effet si $Tx = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$, alors $T(\rho(g)x) = \lambda\rho(g)x$. Donc le sous-espace propre de T correspondant à la valeur propre λ est invariant par ρ .

Théorème 1.12 (Lemme de Schur) *Soit T un opérateur entreliant des représentations irréductibles de G , (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) .*

- *Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas équivalentes, alors $T = 0$.*
- *Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors T est un multiple scalaire de l'identité de E .*

Démonstration : Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas équivalentes, T n'est pas bijectif, donc ou bien $\ker T \neq \{0\}$, ou bien $\text{Im } T \neq E_2$. D'après le lemme 1.10, $\ker T$ est invariant par ρ_1 . Comme ρ_1 est irréductible, si $\ker T \neq \{0\}$, alors $\ker T = E_1$, donc $T = 0$. D'après le lemme 1.10, $\text{Im } T$ est invariante par ρ_2 . Comme ρ_2 est irréductible, si $\text{Im } T \neq E_2$, alors $\text{Im } T = \{0\}$, donc $T = 0$.

Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors, $\forall g \in G, \rho(g) \circ T = T \circ \rho(g)$, et T commute à la représentation ρ . Soit λ une valeur propre de T , qui existe car T est un endomorphisme de E , espace vectoriel sur \mathbb{C} , et soit E_λ le sous-espace propre associé à λ . Par hypothèse E_λ est non nul, donc, comme ρ est irréductible, $E_\lambda = E$, ce qui signifie que $T = \lambda \text{Id}_E$.

Réciproquement, si tout opérateur qui commute à la représentation ρ est un multiple scalaire de l'identité, alors ρ est irréductible. En effet, si ρ n'était pas irréductible, la projection sur un sous-espace vectoriel invariant non trivial serait un opérateur non scalaire qui commute à ρ .

2 Caractères et relations d'orthogonalité

2.1 Généralités

On désignera par $\mathcal{F}(G)$, ou parfois par $\mathbb{C}[G]$, l'espace vectoriel des fonctions sur G à valeurs dans \mathbb{C} . Lorsque cet espace vectoriel est muni du produit scalaire défini ci-dessous, on désigne l'espace hilbertien ainsi défini par $L^2(G)$ (concept qui sera étendu aux groupes compacts).

Définition 2.1 *Sur $L^2(G)$, le produit scalaire est défini par*

$$(f_1|f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g) .$$

On va s'intéresser aux coefficients matriciels des représentations :

Définition 2.2 *Si ρ est une représentation de G dans \mathbb{C}^n , pour tout couple (i, j) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, la fonction $\rho_j^i \in L^2(G)$ qui associe à $g \in G$ le coefficient de la matrice $\rho(g)$ situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne, $(\rho(g))_j^i \in \mathbb{C}$, est appelée un coefficient matriciel de ρ .*

Si ρ est une représentation unitaire, alors

$$\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1} = {}^t \overline{(\rho(g))} ,$$

d'où, dans une base orthonormée,

$$\rho(g^{-1})_j^i = \overline{(\rho(g))_i^j} ,$$

et, en particulier, les coefficients diagonaux de $\rho(g)$ et $\rho(g^{-1})$ sont conjugués.

2.2 Caractère d'une représentation, relations d'orthogonalité

On désigne par Tr la trace d'un endomorphisme.

Définition 2.3 Soit (E, ρ) une représentation de G . On appelle caractère de ρ la fonction χ_ρ sur G à valeurs complexes définie par

$$\forall g \in G, \chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g)) .$$

Des représentations équivalentes ont même caractère.

Pour une représentation matricielle de dimension n ,

$$(2.2) \quad \chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^n (\rho(g))_i^i .$$

Sur chaque classe de conjugaison de G , la fonction χ_ρ est constante.

Définition 2.4 On appelle fonction centrale sur G une fonction constante sur chaque classe de conjugaison.

Les caractères sont donc des fonctions centrales sur le groupe.

Proposition 2.5 Les propriétés élémentaires des caractères sont les suivantes,

- $\chi_\rho(e) = \dim \rho$.
- $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.
- Le caractère d'une somme directe de représentations est la somme des caractères,
 $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.

Démonstration: La première propriété est conséquence de la formule (2.2). Pour démontrer la seconde formule, on peut supposer que ρ est unitaire pour un certain produit scalaire et choisir une base orthonormée. La propriété des sommes directes est évidente.

Si (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) sont des représentations d'un même groupe G , on définit leur produit tensoriel $(E_1 \otimes E_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$ par

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) ,$$

pour $g \in G$ (voir l'exercice 5 pour un rappel des définitions). Une propriété importante des caractères est la suivante : Le caractère d'un produit tensoriel de représentations est le produit des caractères,

$$(2.3) \quad \chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \chi_{\rho_2} .$$

Elle se démontre en observant que la trace d'un produit tensoriel de matrices est le produit des traces.

On a, d'après la proposition précédente,

$$(2.4) \quad (\chi_{\rho_1} | \chi_{\rho_2}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g^{-1}) \chi_{\rho_2}(g) .$$

On va montrer que les caractères de représentations irréductibles inéquivalentes sont orthogonaux et que le caractère d'une représentation irréductible est de norme 1.

Proposition 2.6 Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations de G et $u : E_1 \rightarrow E_2$, une application linéaire. Alors l'application linéaire de E_1 dans E_2 ,

$$(2.5) \quad T_u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g) u \rho_1(g)^{-1} ,$$

entrelace ρ_1 et ρ_2 .

Démonstration : Calculons

$$\begin{aligned} \rho_2(g) T_u &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_2(gh) u \rho_1(h^{-1}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \rho_2(k) u \rho_1(k^{-1}g) , \end{aligned}$$

d'après la relation fondamentale (2.1). Donc,

$$\rho_2(g) T_u = T_u \rho_1(g) .$$

Proposition 2.7 Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations de G et $u : E_1 \rightarrow E_2$, une application linéaire, et T_u défini par (2.5). On suppose ρ_1 et ρ_2 irréductibles.

- Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes, alors $T_u = 0$.
- Si $E_1 = E_2 = E$ et si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors

$$T_u = \frac{\text{Tr } u}{\dim E} \text{Id}_E .$$

Démonstration : Il faut seulement calculer λ sachant que $T_u = \lambda \text{Id}_E$. Or $\text{Tr } T_u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr } u = \text{Tr } u$, donc $\lambda = \frac{\text{Tr } u}{\dim E}$.

Proposition 2.8 Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations irréductibles. On choisit des bases dans E_1 et E_2 .

- (i) Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes,

$$\forall i, j, k, l, \quad \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_{\ell}^k (\rho_1(g^{-1}))_i^j = 0 .$$

- (ii) Si $E_1 = E_2 = E$ et si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g))_{\ell}^k (\rho(g^{-1}))_i^j = \frac{1}{\dim E} \delta_i^k \delta_{\ell}^j .$$

Démonstration : Utilisons une base (e_j) de E_1 et une base (f_{ℓ}) de E_2 , $1 \leq j \leq \dim E_1$, $1 \leq \ell \leq \dim E_2$. On a

$$(T_u)_i^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{a=1}^{\dim E_1} \sum_{b=1}^{\dim E_2} (\rho_2(g))_b^k u_a^b (\rho_1(g^{-1}))_i^a .$$

Choisissons, pour application linéaire u , l'application $u_{(\ell j)} : E_1 \rightarrow E_2$ définie par $u_{(\ell j)}(e_k) = \delta_k^j f_{\ell}$. Alors

$$(u_{(\ell j)})_b^a = \delta_{\ell}^a \delta_b^j ,$$

et par conséquent

$$(T_{u(\ell_j)})_i^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_\ell^k (\rho_1(g^{-1}))_i^j .$$

On applique maintenant la proposition 2.7.

(i) Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes, ceci est toujours nul.

(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ et si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_\ell^k (\rho_1(g^{-1}))_i^j = (T_{u(\ell_j)})_i^k = \frac{\text{Tr } u(\ell_j)}{\dim E} \delta_i^k = \frac{\delta_i^k \delta_\ell^j}{\dim E} .$$

Corollaire 2.9 Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations unitaires irréductibles. On choisit des bases orthonormées dans E_1 et E_2 .

(i) Si ρ_1 et ρ_2 sont inéquivalentes,

$$\forall i, j, k, l, \quad ((\rho_1)_j^i | (\rho_2)_\ell^k) = 0 .$$

(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ et si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,

$$(\rho_j^i | \rho_\ell^k) = \frac{1}{\dim E} \delta^{ik} \delta_{j\ell} .$$

Démonstration : En effet, si ρ_1 est unitaire pour un produit scalaire sur E_1 et si la base choisie dans E_1 est unitaire,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_\ell^k (\rho_1(g^{-1}))_i^j = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_2(g))_\ell^k \overline{(\rho_1(g))_j^i} = ((\rho_1)_j^i | (\rho_2)_\ell^k) .$$

Théorème 2.10 (Relations d'orthogonalité) (i) Si ρ_1 et ρ_2 sont des représentations irréductibles inéquivalentes de G ,

$$(\chi_{\rho_1} | \chi_{\rho_2}) = 0 .$$

(ii) Si ρ est une représentation irréductible de G ,

$$(\chi_\rho | \chi_\rho) = 1 .$$

Démonstration : D'après la relation (2.4) et la proposition précédente, si ρ_1 et ρ_2 sont des représentations irréductibles inéquivalentes, alors $(\chi_{\rho_1} | \chi_{\rho_2}) = 0$. Si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)_i^i \rho(g^{-1})_j^j = \frac{\delta_{ij}}{\dim E}$, d'où $(\chi_\rho | \chi_\rho) = 1$.

On appelle *caractères irréductibles* de G l'ensemble des caractères des représentations irréductibles inéquivalentes de G . On note souvent χ_i le caractère d'une représentation irréductible ρ_i . Les résultats précédents s'énoncent alors ainsi :

Théorème 2.11 Les caractères irréductibles de G forment un système orthonormal dans $L^2(G)$.

Corollaire 2.12 Les représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini G sont en nombre fini.

On désigne par \widehat{G} l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G .

2.3 Table de caractères

On appelle ainsi la table dont les colonnes correspondent aux classes de conjugaison d'un groupe et dont les lignes correspondent aux représentations irréductibles inéquivalentes de ce groupe. À l'intersection de la ligne et de la colonne on inscrit la valeur du caractère de la représentation, évalué sur un élément (quelconque) de la classe de conjugaison. Soit N le nombre de classes de conjugaison (nombre de colonnes; on démontrera que c'est aussi le nombre de lignes). Soit g_i un élément de G , de classe de conjugaison, C_{g_i} , $1 \leq i \leq N$, comportant $|C_{g_i}|$ éléments. Soient ρ_k et ρ_ℓ des représentations irréductibles. Alors

$$(\chi_{\rho_k} | \chi_{\rho_\ell}) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^N |C_{g_i}| \overline{\chi_{\rho_k}(g_i)} \chi_{\rho_\ell}(g_i) = \delta_{k\ell} .$$

Cette formule exprime le résultat suivant :

Proposition 2.13 *La i^{e} colonne ayant pour poids $|C_{g_i}|$, les lignes de la table de caractères sont orthogonales et de norme 1.*

On écrira une table de caractères sous la forme suivante :

	$ C_{g_1} $ g_1	\cdots	$ C_{g_N} $ g_N
χ_{ρ_i}	$\chi_{\rho_i}(g_1)$	\cdots	$\chi_{\rho_i}(g_N)$
\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
χ_{ρ_j}	$\chi_{\rho_j}(g_1)$	\cdots	$\chi_{\rho_j}(g_N)$

2.4 Application à la décomposition des représentations

Désignons par ρ_1, \dots, ρ_N les représentations irréductibles inéquivalentes de G . (Nous verrons au corollaire 3.7 que ce nombre N est bien égal au nombre de classes de conjugaison.) Plus précisément, on a fait choix dans chacune des classes d'équivalence de représentations de G d'un représentant que l'on désigne par ρ_i . Dans les relations ci-dessous, le signe d'égalité entre représentations désigne en fait l'appartenance à une même classe d'équivalence.

Théorème 2.14 *Soit ρ une représentation quelconque de G et soit χ_ρ son caractère.*

Alors $\rho = \bigoplus_{i=1}^N m_i \rho_i$, où $m_i = (\chi_\rho | \chi_{\rho_i})$.

Démonstration : On sait, d'après le théorème de Maschke 1.8, que ρ est somme directe de représentations irréductibles. On peut grouper les termes correspondant à une même classe d'équivalence de représentations irréductibles, ρ_i , d'où $\rho = \bigoplus_{i=1}^N m_i \rho_i$. On a alors $\chi_\rho = \sum_{i=1}^N m_i \chi_{\rho_i}$, d'où, par orthogonalité, $(\chi_\rho | \chi_{\rho_i}) = m_i (\chi_{\rho_i} | \chi_{\rho_i}) = m_i$.

L'entier m_i est la multiplicité de ρ_i dans ρ , et $m_i \rho_i$ est la composante isotypique de type ρ_i de ρ .

Corollaire 2.15 *La décomposition en composantes isotypiques est unique à l'ordre près.*

Corollaire 2.16 *Deux représentations ayant le même caractère sont équivalentes.*

D'après le théorème précédent,

$$(\chi_\rho | \chi_\rho) = \sum_{i=1}^N m_i^2 .$$

D'où

Théorème 2.17 (Critère d'irréductibilité) *Pour qu'une représentation, ρ , soit irréductible, il faut et il suffit que $(\chi_\rho | \chi_\rho) = 1$.*

3 La représentation régulière

3.1 Définition

De manière générale, si un groupe, G , agit sur un ensemble M , alors G agit linéairement sur l'espace des fonctions sur M à valeurs dans \mathbb{C} , $\mathcal{F}(M)$, par $(g, f) \in G \times \mathcal{F}(M) \mapsto g.f \in \mathcal{F}(M)$, où

$$\forall x \in M, (g.f)(x) = f(g^{-1}.x) .$$

On vérifie immédiatement que l'on obtient ainsi une représentation de G dans $\mathcal{F}(M)$.

Prenons $M = G$, le groupe agissant sur lui-même par multiplication à gauche. On obtient une représentation R de G dans $\mathcal{F}(G)$ appelée *représentation régulière gauche* ou simplement *représentation régulière* de G . Donc, par définition,

$$\forall g, h \in G, (R(g)f)(h) = f(g^{-1}h) .$$

On peut définir de même la *représentation régulière droite* associée à l'action à droite de G sur lui-même. Les représentations régulières droite et gauche sont équivalentes. Pour un groupe fini, G , l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G)$ des applications de G dans \mathbb{C} est de dimension finie $|G|$. La représentation régulière est donc de dimension $|G|$.

On utilise la base $(\epsilon_g)_{g \in G}$ de $\mathcal{F}(G)$ définie par :

$$\epsilon_g : G \rightarrow \mathbb{C} \begin{cases} \epsilon_g(g) & = 1, \\ \epsilon_g(h) & = 0, \text{ si } h \neq g. \end{cases}$$

La représentation régulière de G est telle que

$$\forall g, h \in G, R(g)(\epsilon_h) = \epsilon_{gh} .$$

En effet, $\forall k \in G, (R(g)\epsilon_h)(k) = \epsilon_h(g^{-1}k)$, et

$$\epsilon_h(g^{-1}k) = 1 \text{ si } g^{-1}k = h, \text{ } k = gh ,$$

tandis que

$$\epsilon_h(g^{-1}k) = 0 \text{ si } g^{-1}k \neq h, \text{ } k \neq gh .$$

(Dans la représentation régulière droite $\epsilon_h \mapsto \epsilon_{hg^{-1}}$.)

Proposition 3.1 Sur $L^2(G) = \mathcal{F}(G)$ muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, la représentation R est unitaire.

Démonstration : Pour f_1 et $f_2 \in L^2(G)$, on a pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} (R(g)f_1 | R(g)f_2) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{(R(g)f_1)(h)} (R(g)f_2)(h) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{f_1(g^{-1}h)} f_2(g^{-1}h) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \overline{f_1(k)} f_2(k) \\ &= (f_1 | f_2). \end{aligned}$$

3.2 Caractère de la représentation régulière

D'une part,

$$\chi_R(e) = \text{Tr}(R(e)) = \dim \mathcal{F}(G) = |G|.$$

D'autre part, si $g \neq e$, alors

$$\chi_R(g) = \text{Tr}(R(g)) = 0,$$

car, si $g \neq e, \forall h \in G, R(g)\epsilon_h = \epsilon_{h'}, h' \neq h$.

La représentation régulière, R , est réductible car $\sum_{g \in G} \epsilon_g$ engendre un sous-espace vectoriel W de $\mathcal{F}(G)$ de dimension 1 qui est invariant par R . En effet $R(g)(\sum_{h \in G} \epsilon_h) = \sum_{h \in G} \epsilon_{gh} = \sum_{k \in G} \epsilon_k$. De plus $\rho|_W$ est équivalente à la représentation triviale puisque $R(g)(x) = x, \forall x \in W$. Nous allons montrer qu'en fait la représentation régulière contient chaque représentation irréductible de G avec une multiplicité égale à sa dimension.

Exemple 3.2 La représentation régulière de \mathfrak{S}_3 dans $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ est de dimension 6. Elle se décompose en la somme directe de la représentation triviale de dimension 1, la représentation signature de dimension 1 et deux copies de la représentation irréductible de dimension 2 étudiée dans l'exemple 1.2.

3.3 Décomposition de la représentation régulière en composantes isotypiques

On reprend les notations du paragraphe 2.4.

Proposition 3.3 La décomposition de la représentation régulière en composantes isotypiques est $R = \bigoplus_{i=1}^N n_i \rho_i$, où $n_i = \dim \rho_i$.

Démonstration :

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e, \\ 0 & \text{si } g \neq e, \end{cases}$$

d'où $(\chi_R | \chi_{\rho_i}) = \chi_{\rho_i}(e) = \dim \rho_i$.

Théorème 3.4 On a

$$\sum_{i=1}^N (n_i)^2 = |G| ,$$

où $n_i = \dim \rho_i$.

Démonstration : On a $|G| = \chi_R(e) = \sum_{i=1}^N n_i \chi_{\rho_i}(e) = \sum_{i=1}^N (n_i)^2$.

La relation $\sum_{i=1}^N (n_i)^2 = |G|$ est très souvent utilisée, par exemple pour déterminer la dimension d'une représentation irréductible "manquante" lorsqu'on en connaît déjà $N-1$.

3.4 Base de l'espace vectoriel des fonctions centrales

L'espace vectoriel des fonctions centrales sur G à valeurs dans \mathbb{C} a pour dimension le nombre de classes de conjugaison de G . On va montrer que c'est aussi le nombre de classes d'équivalence de représentations irréductibles.

Soit (E, ρ) une représentation de G , et f une fonction sur G . On considère l'endomorphisme ρ_f de E défini par

$$(2.6) \quad \rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g) .$$

Donc, par définition, pour tout $x \in E$, $\rho_f(x) = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g)(x)$.

Lemme 3.5 L'endomorphisme ρ_f possède les propriétés suivantes.

- (i) Si f est centrale, ρ_f commute à ρ .
- (ii) Si f est centrale et si ρ est irréductible,

$$\rho_f = \frac{|G|}{\dim \rho} (\bar{f} | \chi_\rho) \text{Id}_E .$$

Démonstration : Pour toute fonction f , on a

$$\begin{aligned} \rho_f \circ \rho(g) &= \sum_{h \in G} f(h) \rho(h) \rho(g) = \sum_{h \in G} f(h) \rho(hg) \\ &= \sum_{k \in G} f(kg^{-1}) \rho(k) = \sum_{h \in G} f(ghg^{-1}) \rho(gh) . \end{aligned}$$

Comme f est supposée centrale, on obtient

$$\rho_f \circ \rho(g) = \rho(g) \sum_{h \in G} f(h) \rho(h) = \rho(g) \circ \rho_f .$$

Montrons (ii). D'après (i) et le lemme de Schur 1.12, $\rho_f = \lambda \text{Id}_E$. D'autre part, $\text{Tr } \rho_f = \sum_g f(g) \text{Tr } \rho(g) = \sum_g f(g) \chi_\rho(g) = |G| (\bar{f} | \chi_\rho)$, donc

$$\rho_f = \frac{|G| (\bar{f} | \chi_\rho)}{\dim \rho} \text{Id}_E .$$

Théorème 3.6 Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions centrales.

Démonstration : On sait que les caractères des représentations irréductibles inéquivalentes de G forment un système orthonormal dans $L^2(G)$ (théorème 2.11). Montrons que ce système est complet dans le sous-espace vectoriel des fonctions centrales. Soit f une fonction *centrale* telle que, pour $1 \leq i \leq N$, $(f | \chi_{\rho_i}) = 0$, où $\rho_{i,f} = \sum_{g \in G} f(g) \rho_i(g)$. Alors, d'après le lemme précédent, $\rho_{i,\bar{f}} = 0$ et l'on en déduit, par décomposition, que pour toute représentation, ρ , on a $\rho_{\bar{f}} = 0$. En particulier $R_{\bar{f}} = 0$, où R est la représentation régulière. Or,

$$R_{\bar{f}}(\epsilon_g) = \sum_h \bar{f}(h) R(h)(\epsilon_g) = \sum_h \bar{f}(h) \epsilon_{hg} ,$$

et, en particulier,

$$R_{\bar{f}}(\epsilon_e) = \sum_h \bar{f}(h) \epsilon_h = \bar{f} ,$$

donc $f = 0$.

Corollaire 3.7 *Le nombre de classes d'équivalence de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G .*

En d'autres termes, *la table de caractères est carrée.*

Proposition 3.8 *Les colonnes de la table de caractères sont orthogonales et de norme $\sqrt{\frac{|G|}{|C_g|}}$, où $|C_g|$ désigne le nombre d'éléments de la classe de conjugaison de g . Explicitement,*

- $$\sum_{i=1}^N \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho_i}(g') = 0 , \text{ si } g \text{ et } g' \text{ ne sont pas conjugués.}$$

- $$\frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^N \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho_i}(g) = \frac{1}{|C_g|} .$$

En particulier, quand $g = e$, on retrouve la relation $\sum_{i=1}^N (\dim \rho_i)^2 = |G|$.

Démonstration : D'après le théorème 3.6, si f est une fonction centrale, alors

$$f = \sum_{i=1}^N (\chi_{\rho_i} | f) \chi_{\rho_i} .$$

On considère la fonction centrale f_g qui vaut 1 en g et 0 sur les autres classes de conjugaison de G . On a

$$(\chi_{\rho_i} | f_g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\chi_{\rho_i}(h)} f_g(h) = \frac{|C_g|}{|G|} \overline{\chi_{\rho_i}(g)} ,$$

donc $f_g = \frac{|C_g|}{|G|} \sum_{i=1}^N \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho_i}$. En particulier, si $g' \notin C_g$, alors

$$0 = f_g(g') = \frac{|C_g|}{|G|} \sum_{i=1}^N \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho_i}(g') ,$$

ce qui démontre la première formule, et donc l'orthogonalité des colonnes de la table de caractères. D'autre part, $1 = f_g(g) = \frac{|C_g|}{|G|} \sum_{i=1}^N \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho_i}(g)$, ce qui démontre la deuxième formule.

4 Opérateurs de projection

Nous allons mettre en évidence des opérateurs de projection sur les composantes isotypiques dans la décomposition de l'espace vectoriel support d'une représentation quelconque. Soit (E, ρ) une représentation de G et soit $\rho = \bigoplus_{i=1}^N m_i \rho_i$ la décomposition de ρ en composantes isotypiques. Le support de la composante isotypique, $m_i \rho_i$, est $m_i E_i = E_i \oplus \cdots \oplus E_i$ (m_i fois). On désigne ce sous-espace vectoriel de E par V_i . On écrira

$$V_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} E_{i,j} .$$

Théorème 4.1 *Pour tout i , $1 \leq i \leq N$, on pose, avec la notation de la formule (2.6),*

$$P_i = \frac{\dim \rho_i}{|G|} \rho_{\overline{\chi_i}} ,$$

c'est-à-dire,

$$P_i = \frac{\dim \rho_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(g) .$$

(i) P_i est le projecteur de E sur V_i dans la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^N V_i$.

(ii) $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$.

(iii) Si ρ est unitaire, P_i est hermitien, ${}^t \overline{P_i} = P_i$.

Démonstration : Choisissons i_0 , $1 \leq i_0 \leq N$, et montrons que $P_{i_0}|_{V_{i_0}} = \text{Id}_{V_{i_0}}$ et que, si $i \neq i_0$, $P_{i_0}|_{V_i} = 0$. Soit $x = \sum_{i=1}^N x_i$, où $x_i \in V_i$, et $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}$, où $x_{i,j} \in E_{i,j}$, d'où $x = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}$. Alors

$$P_{i_0}(x) = \frac{\dim \rho_{i_0}}{|G|} \sum_{i,j} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{i_0}(g)} \rho(g) x_{i,j} = \frac{\dim \rho_{i_0}}{|G|} \sum_{i,j} \left(\sum_{g \in G} \overline{\chi_{i_0}(g)} \rho_i(g) \right) x_{i,j} .$$

Sachant que χ_{i_0} est une fonction centrale, et que ρ_i est irréductible, on applique le lemme 3.5 et l'on obtient

$$\sum_{g \in G} \overline{\chi_{i_0}(g)} \rho_i(g) = \rho_{i, \overline{\chi_{i_0}}} = \frac{|G|}{\dim \rho_i} (\chi_{i_0} | \chi_i) \text{Id}_{E_i} = \frac{|G|}{\dim \rho_{i_0}} \delta_{ii_0} \text{Id}_{E_{i_0}} ,$$

pour obtenir finalement,

$$P_{i_0}(x) = \sum_{i,j} \delta_{i_0 i} x_{i,j} = \sum_j x_{i_0,j} = x_{i_0} .$$

Les relations $P_i P_j = 0$ si $i \neq j$, $P_i^2 = P_i$ sont des conséquences de (i).

Si ρ est unitaire, alors

$${}^t \overline{\rho_{\overline{\chi_i}}} = \sum_g \chi_i(g) {}^t \overline{\rho(g)} = \sum_g \chi_i(g) \rho(g^{-1}) = \sum_g \chi_i(g^{-1}) \rho(g) = \sum_g \overline{\chi_i(g)} \rho(g),$$

ce qui est égal à $\rho_{\overline{\chi_i}}$, ce qui démontre (iii).

La décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ est unique à l'ordre près. Par contre, la décomposition $V_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} E_{i,j}$ n'est pas unique en général. Par exemple, si $\rho = \text{Id}_E$, alors ρ peut s'écrire d'une infinité de façons comme somme directe de représentations de dimension 1.

5 Représentations induites

L'induction est une opération qui associe à une représentation d'un sous-groupe H d'un groupe G une représentation du groupe G lui-même. La représentation induite d'une représentation irréductible n'est pas, en général, irréductible.

Soit donc G un groupe fini et H un sous-groupe. Soit (F, π) une représentation de H . On définit l'espace vectoriel

$$E = \{ \varphi : G \rightarrow F \mid \forall h \in H, \varphi(gh) = \pi(h^{-1})\varphi(g) \},$$

et l'on définit une représentation $\rho = \pi^{\uparrow G}$ de G dans E par

$$\forall \varphi \in E \quad , \quad (\rho(g_0)\varphi)(g) = \varphi(g_0^{-1}g) ,$$

pour tout $g_0 \in G$ et pour tout $g \in G$. On vérifie que $\rho(g_0)\varphi$ appartient à E puisque

$$(\rho(g_0)\varphi)(gh) = \varphi(g_0^{-1}gh) = \pi(h^{-1})\varphi(g_0^{-1}g) = \pi(h^{-1})((\rho(g_0)\varphi)(g)) ,$$

et d'autre part on vérifie que $g \mapsto \rho(g)$ est un morphisme de groupes de G dans $\text{GL}(E)$. La représentation de G dans E , $\rho = \pi^{\uparrow G}$ est appelée la *représentation induite* de π de H à G .

Par exemple, si $H = \{e\}$ et si π est la représentation triviale de H dans \mathbb{C} , alors l'espace vectoriel E est égal à $\mathbb{C}[G]$ et la représentation induite de π de H à G est la représentation régulière de G .

On peut interpréter l'espace vectoriel E comme l'espace des sections d'un "fibré vectoriel". Considérons le produit cartésien $G \times F$ et introduisons la relation d'équivalence

$$(g, x) \sim (gh, \pi(h^{-1})x), \quad \forall h \in H .$$

Soit $G \times_{\pi} F$ le quotient de $G \times F$ par cette relation d'équivalence et soit $q : G \times_{\pi} F \rightarrow G/H$ la projection qui envoie la classe de (g, x) sur gH (qui est bien définie puisque, si $(g', x') \sim (g, x)$, alors $g' = gh$, pour un $h \in H$). On appelle $G \times_{\pi} F$ un *fibré vectoriel* de base G/H car l'image réciproque par la projection q d'un point quelconque de G/H est isomorphe à l'espace vectoriel F . Une *section* de la projection $q : G \times_{\pi} F \rightarrow G/H$ est, par définition, une application, ψ , de G/H dans $G \times_{\pi} F$ telle que $q \circ \psi = \text{Id}_{G/H}$. Montrons que E n'est autre que l'espace vectoriel des sections de $q : G \times_{\pi} F \rightarrow G/H$. À $\varphi \in E$ et $g \in G$ associons la classe d'équivalence de $(g, \varphi(g))$. Le résultat ne dépend que de la classe de g modulo H . En effet, si $g' = gh$, avec $h \in H$, on obtient la classe de $(gh, \varphi(gh))$ qui est égale à la classe de $(g, \pi(h)\varphi(gh)) = (g, \varphi(g))$, car $\varphi \in E$. On définit donc ainsi une section de $q : G \times_{\pi} F \rightarrow G/H$. D'autre part, étant donnée une section de

$q : G \times_{\pi} F \rightarrow G/H$, on voit que l'on peut lui associer un élément de E (en considérant la deuxième composante de la classe d'équivalence associée à un élément de G/H) et que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre, prouvant l'isomorphisme cherché de E sur l'espace vectoriel des sections du fibré vectoriel $G \times_{\pi} F$.

La notion de représentation induite peut être définie dans des situations plus générales que celle des groupes finis, et comporte de nombreuses applications en mathématiques et en physique.

6 Références pour le chapitre 2

[Broué], [Guichardet], [Serre], [Rauch], [Simon], [Sternberg].

7 Exercices pour le chapitre 2

Exercice 1. *Le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 .*

a) On note c la permutation circulaire (123) et t la transposition (23). Montrer que $\{c, t\}$ engendrent \mathfrak{S}_3 , et que $tc = c^2t$, $ct = tc^2$. Déterminer les classes de conjugaison du groupe \mathfrak{S}_3 .

b) Trouver les représentations de dimension 1 de \mathfrak{S}_3 .

c) Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de \mathbb{C}^3 . Pour $g \in \mathfrak{S}_3$, on pose

$$\rho(g)e_i = e_{g(i)}.$$

Montrer qu'on définit ainsi une représentation de \mathfrak{S}_3 de dimension 3 ("représentation de permutation") et que $V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ est invariant par ρ .

d) Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Trouver une base (u_1, u_2) de V telle que

$$\begin{aligned} \rho(c)u_1 &= ju_1, & \rho(c)u_2 &= j^2u_2, \\ \rho(t)u_1 &= u_2, & \rho(t)u_2 &= u_1. \end{aligned}$$

Existe-t-il un sous-espace vectoriel de dimension 1 de V invariant par ρ ?

On désigne par $\rho_0 = \rho|_V$ la représentation de dimension 2 de \mathfrak{S}_3 sur V définie par restriction. Déterminer $\text{Tr}(\rho_0(c))$ et $\text{Tr}(\rho_0(t))$.

e) Établir la table de caractères de \mathfrak{S}_3 .

f) Quelle est l'interprétation géométrique de \mathfrak{S}_3 comme groupe de symétries? Quelle est l'interprétation géométrique de la représentation ρ_0 ?

Exercice 2. *Une application du lemme de Schur.*

Soit (E, ρ) une représentation irréductible d'un groupe fini G . Montrer que si deux produits scalaires sur E sont invariants par la représentation ρ , ils sont proportionnels.

Exercice 3. *Groupe symétrique \mathfrak{S}_4 .*

Déterminer les classes de conjugaison du groupe symétrique \mathfrak{S}_4 et sa table de caractères.

Exercice 4. *Groupe alterné \mathfrak{A}_4 .*

Déterminer la table de caractères de \mathfrak{A}_4 . Quelles représentations de \mathfrak{A}_4 sont la restriction d'une représentation de \mathfrak{S}_4 ? Quelles représentations de \mathfrak{S}_4 ont une restriction à \mathfrak{A}_4 irréductible? réductible?

Exercice 5. *Produits tensoriels d'espace vectoriels, d'applications linéaires et de matrices.*

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, on peut définir le produit tensoriel $E \otimes F$ comme l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E^* \times F^*$ dans le corps de base. Pour $x \in E$, $y \in F$, on définit l'élément $x \otimes y \in E \otimes F$ par

$$(x \otimes y)(\xi, \eta) = \langle \xi, x \rangle \langle \eta, y \rangle,$$

pour tous $\xi \in E^*$, $\eta \in F^*$.

a) Soient (e_1, \dots, e_n) une base de E et (f_1, \dots, f_p) une base de F . Montrer que $(e_i \otimes f_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une base de $E \otimes F$.

b) On appelle tenseur d'ordre 2 sur E un élément de $E \otimes E$. Tout tenseur d'ordre 2 sur E s'écrit $T = \sum_{i,j=1}^n T^{ij} e_i \otimes e_j$, où les T^{ij} sont des scalaires. Quelles sont les composantes de T après changement de base? Un élément de $E \otimes E$ s'appelle aussi un tenseur contravariant d'ordre 2.

c) Montrer que $E^* \otimes F$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(E, F)$ (à $\xi \otimes y \in E^* \otimes F$, on associe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par $u(x) = \langle \xi, x \rangle y$, pour $x \in E$).

Si $u : E \rightarrow E$ et $v : F \rightarrow F$ sont des applications linéaires, $u \otimes v$ est l'unique endomorphisme de $E \otimes F$ satisfaisant $(u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$, pour tous $x \in E$, $y \in F$.

d) Dans $E \otimes F$, on choisit pour base

$$(e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_p, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_p, \dots, e_n \otimes f_1, \dots, e_n \otimes f_p).$$

Écrire la matrice de $u \otimes v$, où u (resp., v) est un endomorphisme de E (resp., F), de matrice $A = (a_{ij})$ (resp., $B = (b_{ij})$) dans les bases choisies.

e) Comment peut-on définir $\rho_1 \otimes \rho_2$ si (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) sont des représentations d'un groupe G ? Montrer que $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \chi_{\rho_2}$.

Exercice 6. *Représentation contragrédiente.*

Soit (E, π) une représentation d'un groupe G . Pour $g \in G$, $\xi \in E^*$, $x \in E$, on pose $\langle \pi^*(g)(\xi), x \rangle = \langle \xi, \pi(g^{-1})(x) \rangle$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une représentation π^* de G dans E^* . La représentation π^* est appelée la *contragrédiente* de π .

b) Montrer que si (E, π) et (F, ρ) sont des représentations d'un groupe G , alors $(g.u)(x) = \rho(g)(u(\pi(g^{-1})x))$ définit une représentation de G dans $\mathcal{L}(E, F)$, équivalente à $\pi^* \otimes \rho$.

Exercice 7. *Produit extérieur et produit symétrique.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, de base (e_1, \dots, e_n) . On désigne par $\Lambda^2 E$ (resp., $S^2 E$) le sous-espace vectoriel de $E \otimes E$ engendré par $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$, $1 \leq i < j \leq n$ (resp. $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i$, $1 \leq i \leq j \leq n$). Ces définitions ne dépendent pas de la base choisie et $E \otimes E = \Lambda^2 E \oplus S^2 E$. L'espace $\Lambda^2 E$ est la puissance antisymétrique (ou extérieure) d'ordre 2 de E , et l'espace $S^2 E$ est la puissance symétrique d'ordre 2 de E .

a) Si (E, ρ) est une représentation d'un groupe G , $\Lambda^2 E$ et $S^2 E$ sont stables par $\rho \otimes \rho$. On désignera les restrictions par $\Lambda^2 \rho$ et $S^2 \rho$, respectivement. On suppose G fini. Montrer que les caractères de ces représentations vérifient, pour tout $g \in G$:

$$\chi_{\Lambda^2 \rho}(g) = \frac{1}{2} \left((\chi_\rho(g))^2 - \chi_\rho(g^2) \right) , \quad \chi_{S^2 \rho}(g) = \frac{1}{2} \left((\chi_\rho(g))^2 + \chi_\rho(g^2) \right) .$$

b) Si ρ_0 est la représentation irréductible de dimension 2 de \mathfrak{S}_3 , déterminer $\chi_{\Lambda^2 \rho_0}$ et $\chi_{S^2 \rho_0}$. Décomposer $\rho_0 \otimes \rho_0$ en somme de représentations irréductibles.

Exercice 8. *Équivalence des représentations régulières gauche et droite.*

Montrer que les représentations régulières gauche et droite d'un groupe fini sont équivalentes.

Exercice 9. *Représentations des groupes abéliens, représentations des groupes cycliques.*

a) Montrer que toute représentation irréductible d'un groupe fini est de dimension 1 si et seulement si le groupe est abélien.

b) Déterminer toutes les représentations irréductibles inéquivalentes du groupe cyclique d'ordre n .

Exercice 10. *Utilisation des relations d'orthogonalité.*

Soient ρ_i et ρ_j des représentations irréductibles d'un groupe fini G . On pose $\chi_i = \chi_{\rho_i}$, $\chi_j = \chi_{\rho_j}$. Montrer que, pour tout $h \in G$,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}h) = \frac{1}{\dim \rho_i} \chi_i(h) \delta_{ij} .$$

Exercice 11. *Représentation régulière de \mathfrak{S}_3 .*

Ecrire la décomposition canonique de la représentation régulière de \mathfrak{S}_3 .

Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels invariants de dimension 1 et un projecteur sur le sous-espace de la représentation $2\rho_0$, où ρ_0 est la représentation irréductible de dimension 2.

Exercice 12. *Représentations réelles, représentations complexifiées.*

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , de dimension n . Un morphisme d'un groupe fini G dans $\text{GL}(E, \mathbb{R})$ est appelé une *représentation réelle* de G , de dimension (réelle) n .

On considère $E^{\mathbb{C}} = E \oplus iE = E \otimes \mathbb{C}$, espace vectoriel sur \mathbb{C} , de dimension n , appelé *complexifié* de E .

a) Montrer que toute représentation réelle de G dans E se prolonge de manière unique en une représentation (complexe) de G dans $E^{\mathbb{C}}$, appelée *complexifiée* de la représentation réelle.

b) On fait agir le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 sur \mathbb{R}^2 par rotations d'angle $\frac{2k\pi}{3}$ et symétries. Montrer que la complexifiée de cette représentation est équivalente à la représentation irréductible ρ_0 de \mathfrak{S}_3 sur \mathbb{C}^2 .

c) On fait agir le groupe cyclique d'ordre 3 sur \mathbb{R}^2 par rotations d'angle $\frac{2k\pi}{3}$. Cette représentation réelle est-elle irréductible ?

d) Toutes les représentations irréductibles réelles des groupes abéliens sont-elles de dimension 1 ?

Exercice 13. *Représentations du groupe diédral.*

a) Montrer que, si H est un sous-groupe abélien d'ordre p d'un groupe fini G d'ordre n , alors toute représentation irréductible de G est de dimension $\leq \frac{n}{p}$.

b) En déduire que toute représentation irréductible du groupe diédral \mathcal{D}_n est de dimension 1 ou 2.

Exercice 14. *Théorème de Peter-Weyl pour les groupes finis.*

Soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ les représentations irréductibles unitaires inéquivalentes d'un groupe fini G . Montrer que les coefficients matriciels de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ forment une base orthogonale de $L^2(G)$.

Exercice 15. *Représentation de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ dans les polynômes de degré 2.*

Soit G un groupe et soit ρ une représentation de G dans un espace vectoriel V sur \mathbb{C} , de dimension finie n . Soit $P^{(k)}(V)$ l'espace vectoriel des polynômes complexes sur V de degré inférieur ou égal à k .

a) Pour $f \in P^{(k)}(V)$, on pose $\rho^{(k)}(g)(f) = f \circ \rho(g^{-1})$. Montrer que l'on définit ainsi une représentation $\rho^{(k)}$ de G dans $P^{(k)}(V)$.

b) Comparer $\rho^{(1)}$ et la représentation contragrédiente de ρ .

c) On suppose que $V = \mathbb{C}^2$ et que ρ est la représentation standard. Soit $k = 2$. À $f \in P^{(2)}(\mathbb{C}^2)$ défini par $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, on associe la matrice symétrique

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

et le vecteur $v_f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Écrire la représentation $\hat{\rho}$ de $GL(2, \mathbb{C})$ dans l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques 2×2 et la représentation $\tilde{\rho}$ de $GL(2, \mathbb{C})$ dans \mathbb{R}^3 définies par $\rho^{(2)}$ et les isomorphismes définis ci-dessus. Montrer que la contragrédiente de $\tilde{\rho}$ est la représentation de $GL(2, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^3 définie par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. *Convolution.*

Soit G un groupe fini et soit $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre du groupe, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G)$ muni de la multiplication définie par $\epsilon_g \epsilon_{g'} = \epsilon_{gg'}$ et prolongée par linéarité.

a) Montrer qu'alors le produit de deux fonctions f_1, f_2 est le produit de convolution $(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$.

b) Soit ρ une représentation de G et $f \in \mathbb{C}[G]$. On pose $\rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g)$. Montrer que $\rho_{f_1 * f_2} = \rho_{f_1} \circ \rho_{f_2}$.

c) Montrer que $f \in \mathbb{C}[G]$ est une fonction centrale si et seulement si f est dans le centre de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$ munie du produit de convolution (c'est-à-dire commute au sens de la convolution avec toute fonction sur G).

Exercice 17. *Sur l'application $f \mapsto \rho_f$.*

Pour toute représentation (E, ρ) de G , et toute fonction f sur G , on considère l'endomorphisme ρ_f de E défini par

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g).$$

a) Soit R la représentation régulière de G . Étudier $R_f(\epsilon_g)$, pour $g \in G$. Montrer que $R_f(\epsilon_e) = f$. L'application $f \in \mathbb{C}[G] \mapsto R_f \in \text{End } \mathbb{C}[G]$ est-elle injective?

b) Soient ρ_i, ρ_j des représentations irréductibles de G et soit χ_i le caractère de ρ_i . Évaluer $\rho_{j, \overline{\chi_i}}$.

Exercice 18. *Produits tensoriels de représentations.*

Soit ρ la représentation irréductible de dimension 2 du groupe symétrique \mathfrak{S}_3 . On pose $\rho = \rho^{\otimes 1}$ et l'on définit par récurrence, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\rho^{\otimes k} = \rho^{\otimes(k-1)} \otimes \rho.$$

Ainsi, $\rho^{\otimes 2} = \rho \otimes \rho$, $\rho^{\otimes 3} = \rho \otimes \rho \otimes \rho$, ..., $\rho^{\otimes k} = \rho \otimes \rho \otimes \dots \otimes \rho$, k fois.

a) Décomposer $\rho^{\otimes k}$ en somme directe de représentations irréductibles, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Soit $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{S}_3$ le groupe alterné. Décomposer en somme directe de représentations irréductibles les restrictions à \mathfrak{A}_3 de ρ , $\rho \otimes \rho$ et $\rho \otimes \rho \otimes \rho$.

Chapitre 3

Représentations des groupes topologiques compacts

Dans ce chapitre, nous allons étendre au cas des groupes topologiques compacts de nombreuses propriétés démontrées dans le cas des groupes finis. Certaines propriétés seront admises sans démonstration.

1 Groupes topologiques compacts

Rappelons qu'un groupe topologique est un groupe muni d'une structure d'espace topologique séparé (par exemple un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé) telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient des applications continues. Un espace topologique est localement compact si tout point possède un voisinage compact.

Si E est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet), on désigne par $\mathcal{L}(E, E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E (encore appelées *endomorphismes* de E ou *opérateurs linéaires continus* ou *opérateurs bornés* sur E). On le munit de la norme des applications linéaires qui, pour $u : E \rightarrow E$, linéaire et continue, est définie par

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| .$$

Pour tout espace de Banach, E , on désigne par $GL(E) \subset \mathcal{L}(E, E)$ le groupe des isomorphismes de E , c'est-à-dire des endomorphismes bijectifs et bicontinus de E . On sait qu'il suffit qu'une application linéaire continue soit bijective pour que son inverse le soit. On considère $GL(E)$ comme sous-espace topologique de l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, E)$.

La boule unité dans un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie. Donc tout sous-espace *fermé et borné* de $GL(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension *finie*, est compact. Par exemple $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ et $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ sont compacts. De même, $SU(n)$ et $SO(n)$ sont compacts. Le groupe abélien \mathbb{R} muni de sa métrique usuelle est un groupe topologique localement compact mais non compact. Les groupes $GL(n, \mathbb{C})$ et $SL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{R})$ sont localement compacts mais non compacts.

2 Mesure de Haar

Sur un groupe fini G , on sait que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(G)$ et pour tout $g \in G$,

$$\sum_{h \in G} f(h) = \sum_{h \in G} f(gh) = \sum_{h \in G} f(hg) .$$

Si l'on désigne par l_g (resp., r_g) la multiplication à gauche (resp., droite) par $g \in G$, on a par définition $f(gh) = (f \circ l_g)(h)$ et $f(hg) = (f \circ r_g)(h)$. Par conséquent, l'opération de moyenne, $M : f \mapsto M(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$, vérifie

- M est une forme linéaire sur $\mathcal{F}(G)$, positive, c'est-à-dire prenant des valeurs positives sur les fonctions réelles positives,
- M est invariante à gauche et à droite, c'est-à-dire

$$\forall g \in G, M(f \circ l_g) = M(f \circ r_g) = M(f),$$

- $M(1) = 1$.

Sur les groupes topologiques compacts, il existe une mesure, la *mesure de Haar*, qui possède des propriétés analogues. Plus généralement sur un groupe topologique localement compact, il existe des mesures ayant des propriétés d'invariance soit à gauche, soit à droite (mais pas les deux en général).

Théorème 2.1 *Soit G un groupe topologique localement compact.*

a) *Il existe sur G une mesure positive, finie sur les compacts, non identiquement nulle et invariante à gauche, i. e., pour toute fonction mesurable f et pour tout $h \in G$,*

$$\int_G f(hg) d\mu(g) = \int_G f(g) d\mu(g) .$$

Une telle mesure est unique à un facteur scalaire réel positif près. Si f est continue, $f \geq 0$ et $\int f(g) d\mu(g) = 0$, alors $f = 0$.

b) *Si G est compact, il existe sur G une unique mesure invariante à gauche μ telle que $\int_G d\mu(g) = 1$.*

c) *Sur un groupe topologique compact, toute mesure invariante à gauche est invariante à droite.*

Démonstration : a) Voir A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1940, ou L. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand, New York, 1953, ou E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract harmonic analysis I, Springer, 1963, chap. IV.5.

b) Si μ_0 est une mesure invariante à gauche sur G compact et si $\int_G d\mu_0(g) = m$, on pose $\mu = \frac{1}{m} \mu_0$ et μ est clairement l'unique mesure invariante à gauche telle que $\int_G d\mu(g) = 1$.

c) Soit μ une mesure invariante à gauche sur G localement compact. Pour f continue à support compact, posons $\mu(f) = \int_G f(g) d\mu(g)$. Soit $h \in G$ et considérons $\mu_h(f) = \int_G f(gh) d\mu(g)$, c'est-à-dire $\mu_h(f) = \mu(f \circ r_h)$. Alors,

$$\forall k \in G, \mu_h(f \circ l_k) = \int_G f(kgh) d\mu(g) = \int_G f(gh) d\mu(g) = \mu_h(f),$$

donc, d'après l'unicité des mesures invariantes à gauche à un facteur près, il existe un scalaire $\Delta(h) \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\mu_h(f) = \Delta(h)\mu(f).$$

Si G est compact, on peut intégrer la fonction constante 1. On obtient $\mu_h(1) = \mu(1) = \Delta(h)\mu(1)$. D'où $\Delta = 1$ et μ est donc aussi invariante à droite, *i. e.*, pour tout $h \in G$, $\int_G f(gh)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g)$.

Définition 2.2 *Sur un groupe topologique compact, l'unique mesure invariante à gauche et à droite, et de masse totale 1, s'appelle la mesure de Haar.*

Sur un groupe topologique localement compact, G , la fonction $\Delta : h \in G \mapsto \Delta(h) \in \mathbb{R}^+$ est appelée la *fonction modulaire* de G . Elle vérifie

$$\Delta(hh') = \Delta(h)\Delta(h'),$$

car $\Delta(hh')\mu(f) = \mu_{hh'}(f) = \mu(f \circ r_{hh'}) = \mu(f \circ r_{h'} \circ r_h) = \Delta(h)\mu(f \circ r_{h'}) = \Delta(h)\Delta(h')\mu(f)$. On dit que le groupe localement compact G est *unimodulaire* si $\Delta = 1$. Le théorème précédent dit que si G est compact, alors G est unimodulaire. On écrit souvent $\int f(g)dg$ au lieu de $\int f(g)d\mu(g)$. Ainsi, si G est compact, pour toute fonction mesurable f ,

$$\forall h \in G, \int_G f(g)dg = \int_G f(hg)dg = \int_G f(gh)dg,$$

et l'on impose à μ de satisfaire la condition de normalisation, $\int_G dg = 1$.

Exemples :

- Sur un groupe abélien, toute mesure invariante à gauche est évidemment aussi invariante à droite.
- Dans le cas du groupe abélien localement compact \mathbb{R} , toute mesure invariante est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.
- Si $G = U(1) = S^1 = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, alors

$$dg = \frac{d\theta}{2\pi} \quad \text{ou} \quad dg = \frac{dz}{2i\pi z}.$$

- Pour $G = SU(2) \simeq S^3$, voir [Guichardet, page 25] ou [Sternberg, page 177].

3 Représentations des groupes topologiques. Lemme de Schur

Tous les espaces de Hilbert considérés sont séparables, c'est-à-dire possèdent une base hilbertienne dénombrable. Les espaces de Hilbert considérés d'abord sont réels ou complexes, mais certaines propriétés sont valables seulement dans le cas complexe.

3.1 Généralités

Définition 3.1 Soit G un groupe topologique. On appelle représentation continue, ou simplement représentation, de G la donnée d'un espace de Hilbert, E , et d'un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$g \in G \mapsto \rho(g)x \in E$$

est une application continue.

Une condition suffisante pour que la condition de continuité ci-dessus soit satisfaite est que

$$\lim_{g \rightarrow e} \|\rho(g) - \text{Id}_E\| = 0 ,$$

c'est-à-dire que ρ soit continue comme application de G dans $\text{GL}(E)$ muni de la topologie induite par la norme de $\mathcal{L}(E, E)$. Si E est de dimension finie, cette condition suffisante est aussi nécessaire.

La dimension, finie ou infinie, de E s'appelle la dimension de ρ .

La représentation triviale dans un espace vectoriel E est définie par, $\forall g, \rho(g) = \text{Id}_E$.

Soit E un espace de Hilbert complexe. Si $u \in \mathcal{L}(E, E)$, l'adjoint u^* de u est défini par

$$\forall x, y \in E, (ux|y) = (x|u^*y) ,$$

et un élément $u \in \text{GL}(E)$ est un *opérateur unitaire* si $uu^* = u^*u = \text{Id}_E$. Le groupe des opérateurs unitaires de E est noté $U(E)$. En dimension finie et dans une base orthonormée, un opérateur unitaire est représenté par une matrice unitaire.

Une représentation ρ de G dans E est dite *unitaire* si E est un espace de Hilbert complexe et $\forall g, \rho(g) \in U(E)$. Alors, $\forall g \in G, \forall x, y \in E, (\rho(g)x|\rho(g)y) = (x|y)$ et, en particulier, pour tout $x \in E, \|\rho(g)x\| = \|x\|$.

Si E est un espace de Hilbert réel, on parle de représentation *orthogonale*.

3.2 Coefficients d'une représentation

Pour $x \in E, \xi \in E^*$, on pose

$$\phi_{x\xi}^\rho(g) = \langle \rho(g)x, \xi \rangle ,$$

où \langle , \rangle désigne le crochet de dualité. En dimension finie, étant donnée une base (e_i) de E , de base duale (e_i^*) , on retrouve les coefficients matriciels

$$\phi_{ij}^\rho(g) = \phi_{e_j e_i^*}^\rho(g) = \langle \rho(g)e_j, e_i^* \rangle = (\rho(g))_j^i ,$$

où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne, qui vérifient

$$\rho(g)e_j = \sum_i \phi_{ij}^\rho(g)e_i .$$

On peut aussi considérer, pour $x, y \in E$,

$$\varphi_{xy}^\rho(g) = (\rho(g)x|y) ,$$

et, pour toute base (e_i) de E ,

$$\varphi_{ij}^\rho(g) = (\rho(g)e_j | e_i) .$$

Si ρ est unitaire et si la base (e_i) est orthonormée,

$$\varphi_{ij}^\rho = \phi_{ij}^\rho .$$

3.3 Opérateurs d'entrelacement

Définition 3.2 Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations unitaires de G . On appelle opérateur d'entrelacement de ρ_1 et ρ_2 toute application linéaire continue $T : E_1 \rightarrow E_2$ telle que, $\forall g \in G$, $\rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g)$.

En particulier, une application linéaire continue, T , entrelace (E, ρ) avec elle même si et seulement si T commute à ρ .

Deux représentations (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) sont *équivalentes* s'il existe un opérateur d'entrelacement bijectif (et donc bicontinu) T entre ρ_1 et ρ_2 . Alors E_1 est isomorphe à E_2 et $\rho_2(g) = T \circ \rho_1(g) \circ T^{-1}$. On définit ainsi la *classe d'équivalence* d'une représentation.

Définition 3.3 Une représentation (E, ρ) de G est dite *irréductible* s'il n'existe aucun sous-espace vectoriel fermé non trivial de E invariant par ρ .

S'il existe un sous-espace vectoriel *fermé*, F , invariant par ρ , la restriction de ρ à F s'appelle une *sous-représentation* de ρ .

Proposition 3.4 Si (E, ρ) est une représentation unitaire, et si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel fermé invariant par ρ , alors l'orthogonal de F , F^\perp , est aussi un sous-espace vectoriel fermé invariant par ρ , et les projecteurs orthogonaux sur F , P_F , et sur F^\perp , P_{F^\perp} , commutent avec ρ .

Démonstration. On sait que pour tout sous-espace vectoriel, F , de E , l'orthogonal, F^\perp , de F est fermé. Par hypothèse, $\forall x \in F, \rho(g)x \in F$. Soit $y \in F^\perp$. Alors $\forall x \in F, (x|y) = 0$. D'où $\forall x \in F, (x|\rho(g)y) = (\rho(g)^{-1}x|y) = 0$, donc $\rho(g)y \in F^\perp$. De plus,

$$\rho(g)y = \rho(g)(P_F y + P_{F^\perp} y) = \rho(g)P_F y + \rho(g)P_{F^\perp} y .$$

Le premier terme est $P_F(\rho(g)y)$ et le second $P_{F^\perp}(\rho(g)y)$.

3.4 Opérations sur les représentations

On peut faire la *somme directe hilbertienne*, $(\hat{\oplus} E_i, \hat{\oplus} \rho_i)$, d'une famille dénombrable de représentations unitaires (E_i, ρ_i) . Dans l'espace de la représentation, chaque E_i est un sous-espace fermé, les E_i sont orthogonaux deux à deux et la somme directe est dense.

Une représentation est dite *complètement réductible* (ou *semi-simple*) si elle est somme directe hilbertienne de représentations irréductibles.

Si ρ est une représentation irréductible, on utilisera encore la notation $m\rho$ pour désigner la *composante isotypique* de type ρ d'une représentation complètement réductible, m pouvant être un entier ou ∞ .

On définit le produit tensoriel $\rho_1 \otimes \rho_2$ sur $E_1 \otimes E_2$ de deux représentations (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) , par

$$((\rho_1 \otimes \rho_2)(g))(x_1 \otimes x_2) = \rho_1(g)x_1 \otimes \rho_2(g)x_2 .$$

Si ρ_1, ρ_2 sont des représentations de dimension infinie, on considérera $E_1 \hat{\otimes} E_2$, produit tensoriel complété pour la norme associée au produit scalaire, dont on montre qu'il est positif,

$$(x_1 \otimes x_2 | x'_1 \otimes x'_2) = (x_1 | x'_1)(x_2 | x'_2),$$

appelé *produit tensoriel hilbertien* de E_1 et E_2 .

Théorème 3.5 *Toute représentation unitaire de dimension finie d'un groupe topologique G est complètement réductible.*

La démonstration est la même que pour les groupes finis, en utilisant la proposition 3.4.

Il existe des représentations (non unitaires) qui sont réductibles mais non complètement réductibles.

3.5 Lemme de Schur

Théorème 3.6 (Lemme de Schur) *Soit G un groupe topologique et soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations unitaires irréductibles de G . Soit T une application linéaire continue de E_1 dans E_2 qui entrelace ρ_1 et ρ_2 . Alors ou bien $T = 0$, ou bien T est un isomorphisme (et par conséquent ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes) et T est unique à une constante multiplicative près.*

En résumé, si $T\rho_1(g) = \rho_2(g)T$ ou bien $\rho_1 \approx \rho_2$ et $T = 0$, ou bien $\rho_1 \sim \rho_2$ et T est un isomorphisme. La démonstration utilise la décomposition spectrale des opérateurs hermitiens.

Corollaire 3.7 *Soit G un groupe topologique et (E, ρ) une représentation unitaire de G . La représentation ρ est irréductible si et seulement si tout endomorphisme de E qui commute à ρ est un multiple scalaire de l'identité.*

Démonstration. En effet, si ρ n'est pas irréductible, la projection sur un sous-espace fermé non trivial invariant est un endomorphisme de E non scalaire qui commute à ρ .

La réciproque se démontre à partir du lemme de Schur.

Corollaire 3.8 *Les représentations irréductibles complexes de dimension finie ou unitaires d'un groupe abélien sont de dimension 1.*

Démonstration. Soit (E, ρ) une représentation d'un groupe abélien G . Soit $g \in G$. Alors, pour tout $h \in G$, $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$ donc $\rho(g)$ commute à ρ , donc G agit par multiplication scalaire. Si la représentation ρ est irréductible, elle doit être de dimension 1.

Rappelons que dans cet énoncé, comme dans le précédent, les représentations sont supposées complexes.

4 Représentations des groupes topologiques compacts

Dans tout ce paragraphe, on considère un groupe topologique G supposé *compact* et des représentations *complexes*.

4.1 Complète réductibilité

Théorème 4.1 *Toute représentation d'un groupe topologique compact est unitarisable.*

Démonstration. Soit G un groupe topologique compact, et soit (E, ρ) une représentation de G . On pose, pour $x, y \in E$,

$$(x|y) = \int_G (\rho(g)x|\rho(g)y) dg ,$$

où dg est la mesure de Haar sur G . C'est bien un produit scalaire car, si $(x|x)' = 0$, alors d'après le théorème 2.1a), $(\rho(g)x|\rho(g)x) = 0$, pour tout $g \in G$, et par conséquent, $x = 0$. D'autre part,

$$(\rho(g)x|\rho(g)y)' = \int_G (\rho(gh)x|\rho(gh)y) dh = \int_G (\rho(h)x|\rho(h)y) dh = (x|y)' .$$

Ainsi $\rho(g)$ est unitaire pour $(\ |)'$. On montre alors que les normes associées à $(\ |)$ et $(\ |)'$ sont équivalentes, ce qui implique que la représentation reste continue et que les représentations ρ dans les espaces de Hilbert $(E, (\ |))$ et $(E, (\ |)')$ sont équivalentes (l'identité de E est bicontinue et entrelace ces représentations).

Corollaire 4.2 *Toute représentation de dimension finie d'un groupe topologique compact est complètement réductible.*

Nous admettrons encore le résultat suivant (voir [Naimark-Štern, page 205]).

Théorème 4.3 *Toute représentation unitaire irréductible d'un groupe topologique compact est de dimension finie.*

4.2 Relations d'orthogonalité

On définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs complexes sur G par

$$(f_1|f_2) = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g) dg ,$$

où dg est la mesure de Haar. On désigne par $L^2(G)$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant cet espace préhilbertien pour la norme définie par ce produit scalaire.

On sait que les représentations irréductibles de G sont de dimension finie. Les relations d'orthogonalité des caractères des représentations irréductibles s'étendent au cas compact.

Théorème 4.4 *Soit G un groupe topologique compact et soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations unitaires irréductibles de G . Pour tous $x_1, x'_1 \in E_1$ et $x_2, x'_2 \in E_2$,*

$$\left(\varphi_{x_1 x'_1}^{\rho_1} | \varphi_{x_2 x'_2}^{\rho_2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\approx \rho_2 , \\ \frac{1}{\dim E} (x_1|x'_1)(x_2|x'_2) & \text{si } E_1 = E_2 = E \text{ et } \rho_1 = \rho_2 = \rho . \end{cases}$$

Démonstration. Pour toute application linéaire continue $u : E_1 \rightarrow E_2$, on introduit, en généralisant le procédé utilisé dans la proposition 2.6 du chapitre 2,

$$T_u = \int_G \rho_2(g) u \rho_1(g)^{-1} dg ,$$

et l'on montre que T_u entrelace ρ_1 et ρ_2 . On considère alors l'application $u_{x_1 x_2} : E_1 \rightarrow E_2$ définie par $u_{x_1 x_2}(x) = (x|x_1)x_2$. On trouve $(T_{u_{x_1 x_2}} x'_1 | x'_2) = (\varphi_{x_1 x'_1}^{\rho_1} | \varphi_{x_2 x'_2}^{\rho_2})$. On applique alors le lemme de Schur. Cette quantité est nulle si $\rho_1 \not\sim \rho_2$. Si $E_1 = E_2 = E$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors cette quantité s'écrit $\tau(x_1, x_2)(x'_1 | x'_2)$, où $\tau(x_1, x_2)$ est antilinéaire en x_1 et linéaire en x_2 , donc s'écrit $(Sx_1 | x_2)$ pour un opérateur linéaire S . On voit alors que S commute à ρ donc est proportionnel à l'identité de E . On calcule cette constante en choisissant pour x_1, x_2, x'_1, x'_2 des vecteurs d'une base orthonormée de E .

En particulier, si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas équivalentes, alors dans des bases orthonormées,

$$(\varphi_{ij}^{\rho_1} | \varphi_{kl}^{\rho_2}) = 0$$

et, si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, alors

$$(\varphi_{ij}^{\rho} | \varphi_{kl}^{\rho}) = \frac{1}{\dim E} \delta_{ik} \delta_{jl} .$$

Si (E, ρ) est une représentation de dimension finie de G , on définit le *caractère* χ_ρ de ρ par

$$\forall g \in G, \chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g)) .$$

C'est une fonction continue sur G à valeurs complexes. De plus, la fonction χ_ρ est une fonction centrale sur G et elle ne dépend que de la classe d'équivalence de la représentation ρ .

Théorème 4.5 (Relations d'orthogonalité) *Soient ρ_1 et ρ_2 des représentations irréductibles de G . Alors*

$$(\chi_{\rho_1} | \chi_{\rho_2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\sim \rho_2 , \\ 1 & \text{si } \rho_1 \sim \rho_2 . \end{cases}$$

Démonstration. Ces relations sont une conséquence immédiate des formules précédentes.

On désigne par \hat{G} l'ensemble des classes d'équivalence ρ_i de représentations irréductibles d'un groupe topologique compact G . Lorsque $L^2(G)$ est séparable – ce qui a lieu dans les cas que l'on rencontre en pratique –, les relations d'orthogonalité ci-dessus impliquent que cet ensemble est dénombrable. On pose $\chi_i = \chi_{\rho_i}$. Si ρ est une représentation de G , on peut la décomposer en somme hilbertienne de représentations irréductibles,

$$\rho = \hat{\bigoplus}_{i \in \hat{G}} m_i \rho_i ,$$

où

$$m_i = (\chi_i | \chi_\rho) .$$

On peut avoir $m_i = \infty$. Un projecteur sur la composante isotypique $m_i \rho_i$ est

$$P_i = (\dim \rho_i) \int_G \overline{\chi_i(g)} \rho(g) dg .$$

Une représentation ρ est irréductible si et seulement si $(\chi_\rho | \chi_\rho) = 1$.

5 Résumé du chapitre 3

Nous résumons quelles sont les propriétés des groupes finis qui restent valables pour les groupes *compacts*. Les représentations sont supposées *complexes*.

Représentations de G fini

Représentations de G compact

Toute représentation est unitarisable *vrai*

Toute représentation de dimension finie est complètement réductible *vrai*

Toute représentation unitaire irréductible est de dimension finie *vrai*

Il y a un nombre fini de classes d'équivalence de représentations irréductibles
 = nombre de classes de conjugaison du groupe
 = dimension de l'espace vectoriel des fonctions centrales *faux*

Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions centrales *vrai*
au sens de base hilbertienne

Les coefficients des représentations unitaires irréductibles forment une base orthogonale de l'espace vectoriel $L^2(G)$ *vrai*
au sens de système orthogonal

Toute représentation a une décomposition en somme directe *en somme directe hilbertienne*

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^N m_i \rho_i \qquad \rho = \hat{\bigoplus}_{i \in \hat{G}} m_i \rho_i$$

$$m_i = (\chi_i | \chi_\rho) \qquad m_i = (\chi_i | \chi_\rho)$$

Décomposition de la représentation régulière $\sum_{i=1}^N (\dim \rho_i)^2 = |G|$ *faux*

Chaque représentation irréductible est contenue dans la représentation régulière un nombre de fois égal à sa dimension *vrai*

Projecteur sur une composante isotypique $P_i = \frac{\dim \rho_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(g)$ $P_i = (\dim \rho_i) \int_G \overline{\chi_i(g)} \rho(g) dg$

6 Références pour le chapitre 3

[Barut-Ra czka], [Guichardet], [Naimark-Štern], [Rossmann], [Simon], [Sternberg].

7 Exercices pour le chapitre 3

Exercice 1. Représentations continues.

Soit E un espace de Hilbert et soit ρ un morphisme du groupe localement compact G dans $GL(E)$, le groupe des opérateurs linéaires bijectifs et continus de E sur E . (On sait qu'un tel opérateur est bicontinu.). On considère les conditions suivantes :

(i) ρ est une application continue de G dans $GL(E)$ muni de la norme usuelle.

(ii) $\lim_{g \rightarrow e} \|\rho(g) - id_E\| = 0$.

(iii) L'application $(g, x) \in G \times E \mapsto \rho(g)(x) \in E$ est continue.

(iv) $\forall x \in E$, l'application $g \in G \mapsto \rho(g)(x) \in E$ est continue.

a) Montrer que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes.

b) Montrer que (i) implique (iii).

c) Montrer que les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes [on pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus : si, pour tout $x \in E$, $\sup_{g \in G} \|\rho(g)(x)\| < \infty$, alors $\sup_{g \in G} \|\rho(g)\| < \infty$ (voir, par exemple, H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, 1983, page 16)].

d) Montrer que si E est de dimension finie, ces conditions sont équivalentes.

Rappel : Par définition, une *représentation continue* de G dans E , appelée aussi simplement *représentation*, satisfait la condition (iv).

Exercice 2. Représentation régulière des groupes compacts.

Soit G un groupe topologique compact muni de la mesure de Haar. On considère $E = L^2(G)$. On pose, $\forall f \in L^2(G), g, h \in G$,

$$(R(g)(f))(h) = f(g^{-1}h) .$$

Montrer que R est une représentation unitaire de G dans $L^2(G)$.

Exercice 3. Équivalence de représentations.

Montrer que deux représentations unitaires équivalentes d'un groupe topologique sont unitairement équivalentes [introduire l'adjoint T^* de l'opérateur d'entrelacement T et la racine carrée positive de l'opérateur auto-adjoint positif TT^*].

Exercice 4. Une représentation non complètement réductible.

Soit G le groupe des matrices complexes $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ telles que $|a| = 1$, muni de la topologie usuelle.

a) Ce groupe est-il compact ?

b) Montrer que la représentation standard de G sur \mathbb{C}^2 est réductible, mais qu'elle n'est pas complètement réductible.

c) Déterminer les endomorphismes de \mathbb{C}^2 qui commutent à la représentation standard de G .

Exercice 5. *Mesure de Haar.*

a) Déterminer la mesure de Haar sur $O(2)$.

b) Déterminer la mesure de Haar à gauche et la mesure de Haar à droite sur le groupe des transformations affines de \mathbb{R} .

Chapitre 4

Groupes et algèbres de Lie

Dans ce chapitre nous allons définir et étudier les groupes de Lie et montrer qu'à tout groupe de Lie correspond une algèbre de Lie. Pour la commodité de l'exposé, nous commencerons par définir les algèbres de Lie, pour revenir ensuite à l'étude des groupes.

1 Algèbres de Lie

1.1 Définition et exemples

On peut définir les algèbres de Lie sur un corps quelconque. Nous nous limiterons au cas réel ou complexe. Soit donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 1.1 Une algèbre de Lie \mathfrak{a} sur \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie ou infinie, muni d'une opération, $[\ , \]$, \mathbb{K} -bilinéaire, antisymétrique et satisfaisant l'identité de Jacobi,

$$(4.1) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{a}, [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 .$$

L'opération bilinéaire $[\ , \]$ est appelée crochet de Lie.

Exemples :

- L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit vectoriel est une algèbre de Lie réelle de dimension 3.
- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On définit le commutateur de deux applications linéaires, u et v , de E dans E par

$$(4.2) \quad [u, v] = u \circ v - v \circ u .$$

La vérification de l'identité de Jacobi est immédiate car

$$\begin{aligned} u \circ (v \circ w - w \circ v) - (v \circ w - w \circ v) \circ u + v \circ (w \circ u - u \circ w) - (w \circ u - u \circ w) \circ v \\ + w \circ (u \circ v - v \circ u) - (u \circ v - v \circ u) \circ w = 0 . \end{aligned}$$

On définit donc ainsi une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans E .

En particulier, l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients dans le corps \mathbb{K} , muni du commutateur,

$$(4.3) \quad [X, Y] = XY - YX ,$$

est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} de dimension n^2 , que l'on note $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Définition 1.2 Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel stable par le crochet.

Ainsi tout \mathbb{K} -sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ stable par le commutateur est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} .

Exemples :

- l'espace vectoriel des matrices réelles (resp., complexes) à trace nulle est une algèbre de Lie réelle (resp., complexe).
- l'espace vectoriel des matrices complexes antihermitiennes est une algèbre de Lie réelle.
- l'espace vectoriel des matrices réelles antisymétriques est une algèbre de Lie réelle.
- Plus généralement, si $p + q = n$, on désigne par J_{pq} la matrice diagonale comportant sur la diagonale p fois 1 suivi de q fois -1 , et l'on pose

$$\mathfrak{so}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X J_{pq} + J_{pq} {}^t X = 0\} .$$

C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. En effet

$$J_{pq}({}^t Y {}^t X - {}^t X {}^t Y) = -Y J_{pq} {}^t X + X J_{pq} {}^t Y = -(XY - YX) J_{pq} .$$

Remarque : Ni l'espace vectoriel des matrices symétriques ni celui des matrices hermitiennes ne sont stables par le commutateur.

Le *centre* d'une algèbre de Lie \mathfrak{a} est la sous-algèbre de Lie,

$$\{X \in \mathfrak{a} \mid \forall Y \in \mathfrak{a}, [X, Y] = 0\} .$$

Le centre de \mathfrak{a} est en fait un *idéal* de \mathfrak{a} , c'est-à-dire, pour tout élément Z du centre et pour tout élément X de \mathfrak{a} , $[X, Z]$ appartient au centre.

Si E est un espace vectoriel normé, on considère l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E , muni de la norme des applications linéaires qui satisfait l'inégalité

$$(4.4) \quad \|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\| .$$

Cet espace vectoriel muni du commutateur (4.2) est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de toutes les applications linéaires de E dans E , qui lui est égale si E est de dimension finie. On désigne cette algèbre de Lie par $\mathfrak{gl}(E)$.

Dans la suite, nous considérerons des algèbres de Lie de dimension finie.

1.2 Morphismes

Soient \mathfrak{a} et \mathfrak{b} des algèbres de Lie sur \mathbb{K} . Un *morphisme* de \mathfrak{a} dans \mathfrak{b} est une application \mathbb{K} -linéaire φ de \mathfrak{a} dans \mathfrak{b} telle que

$$\forall X, Y \in \mathfrak{a}, [\varphi X, \varphi Y]_{\mathfrak{b}} = \varphi([X, Y]_{\mathfrak{a}}) .$$

Un *isomorphisme* de \mathfrak{a} sur \mathfrak{b} est un morphisme bijectif. Un *automorphisme* de \mathfrak{a} est un isomorphisme de \mathfrak{a} sur \mathfrak{a} . On note $\text{Aut}(\mathfrak{a})$ le groupe des automorphismes de \mathfrak{a} .

1.3 Relations de commutation, constantes de structure

Soit \mathfrak{a} une algèbre de Lie de dimension finie d , et soit (e_i) , $i = 1, \dots, d$, une base de \mathfrak{a} . On appelle *relations de commutation* la donnée des crochets de Lie, $[e_i, e_j]$, $1 \leq i < j \leq d$. Les constantes, nombres réels ou complexes, C_{jk}^i , telles que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^d C_{ij}^k e_k ,$$

sont appelées *constantes de structure*. Si deux algèbres de Lie de dimension finie ont les mêmes relations de commutation, elles sont isomorphes. Plus précisément, s'il existe dans des algèbres de Lie \mathfrak{a} et \mathfrak{b} de même dimension finie des bases (e_i) et (f_i) telles que les constantes de structure soient les mêmes, alors l'isomorphisme linéaire de \mathfrak{a} sur \mathfrak{b} défini par $e_i \mapsto f_i$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

1.4 Formes réelles

D'une part, toute algèbre de Lie complexe, \mathfrak{a} , peut être considérée comme une algèbre de Lie sur \mathbb{R} , notée $\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}$, de dimension double. D'autre part, toute algèbre de Lie réelle, \mathfrak{a} , peut être complexifiée, en posant $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{a}$. Une *forme réelle* d'une algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle \mathfrak{a} telle que $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$. Par exemple $(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Une algèbre de Lie complexe possède des formes réelles non isomorphes.

Attention, si E est un espace vectoriel complexe (resp., réel), alors $(E^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \neq E$ (resp., $(E^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} \neq E$), ce que l'on voit facilement en calculant les dimensions.

1.5 Représentations d'algèbres de Lie

Nous définissons ici les représentations d'algèbres de Lie et nous verrons au paragraphe 6.2 le lien entre représentations de groupes et représentations d'algèbres de Lie.

Définition 1.3 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} . On appelle *représentation (de dimension finie) de \mathfrak{g}* toute application \mathbb{K} -linéaire de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(E)$, où E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie, satisfaisant

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y]) .$$

En d'autres termes, une représentation d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} dans un espace vectoriel E est un morphisme d'algèbres de Lie de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(E)$.

On peut aussi définir une représentation d'une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} dans un espace vectoriel complexe E : c'est un morphisme d'algèbres de Lie réelles de \mathfrak{g} dans $(\mathfrak{gl}(E))^{\mathbb{R}}$. Un tel morphisme possède une extension unique en un morphisme d'algèbres de Lie complexes de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{gl}(E)$ (voir chapitre 6, Proposition 1.1).

Plus loin, nous étudierons de nombreux exemples. En voici un très simple. Les matrices

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, de dimension 3, dont les relations de commutation sont

$$[\eta_k, \eta_\ell] = \eta_m,$$

pour toute permutation circulaire k, ℓ, m de 1, 2, 3. Aux éléments η_1, η_2, η_3 de \mathfrak{g} , on associe les matrices complexes 2×2 ,

$$\xi_1 = \frac{i}{2}\sigma_1, \quad \xi_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2, \quad \xi_3 = \frac{i}{2}\sigma_3,$$

où

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sont les matrices de Pauli. Parce que

$$[\xi_k, \xi_\ell] = \xi_m,$$

on vérifie immédiatement que l'application \mathbb{R} -linéaire définie par $\eta_k \mapsto \xi_k$ est bien une représentation de \mathfrak{g} dans \mathbb{C}^2 . En effet, l'application $\eta_k \mapsto \xi_k$, prolongée par \mathbb{C} -linéarité, définit un morphisme d'algèbres de Lie complexes de $\mathfrak{so}(3)^{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$.

Des représentations (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) d'une algèbre de Lie \mathfrak{a} sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme T de E_1 sur E_2 tel que

$$\forall X \in \mathfrak{a}, \quad \rho_2(X) \circ T = T \circ \rho_1(X).$$

2 Rappels sur l'application exponentielle

Soit $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$. On pose

$$(4.5) \quad \exp X = e^X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!}.$$

Lorsque l'on munit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ de la norme des applications linéaires, cette série est normalement convergente et uniformément convergente sur tout compact, $\|X\| \leq K$, à cause de l'inégalité (4.4). On a

$$(4.6) \quad \exp 0 = I,$$

$$(4.7) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \exp(s+t)X = \exp(sX) \exp(tX) .$$

De plus, si $XY = YX$ (mais dans ce cas seulement!), alors $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$.
On déduit de (4.7) que, pour tout X , $\exp X$ est inversible, d'inverse $\exp(-X)$,

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X) .$$

Ainsi \exp est une application de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ dans $GL(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Lemme 2.1 *L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tX) \in GL(n, \mathbb{K})$ est dérivable et*

$$\frac{d}{dt} \exp(tX) = X \exp(tX) = \exp(tX) X .$$

Démonstration : La dérivation terme à terme de la série exponentielle pour $\exp(tX)$ est licite et donne

$$\frac{d}{dt} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} t^p = \sum_{p=1}^{\infty} X^p \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} = X \sum_{p=0}^{\infty} X^p \frac{t^p}{p!} = X \exp(tX) = \exp(tX) X .$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt} \exp(tX)|_{t=0} = X .$$

Proposition 2.2 *L'application \exp de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ dans $GL(n, \mathbb{K}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ est de classe C^∞ et sa différentielle en l'origine est l'application identique de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ dans lui-même.*

Démonstration : On a

$$\exp X = I + X + X \sum_{p=2}^{\infty} \frac{X^{p-1}}{p!} ,$$

d'où $\|\exp X - \exp 0 - X\| \leq \|X\| \varepsilon(X)$, où

$$\varepsilon(X) = \left\| \sum_{p=2}^{\infty} \frac{X^{p-1}}{p!} \right\| = \|X\| \left\| \sum_{q=0}^{\infty} \frac{X^q}{(q+2)!} \right\| .$$

Cette dernière série est normalement convergente, donc $\lim_{\|X\| \rightarrow 0} \|\varepsilon(X)\| = 0$, ce qui montre que \exp est différentiable en 0, de différentielle $\text{Id}_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})}$.

On montre et nous admettrons que l'application \exp est différentiable en tout point et qu'elle est en fait de classe C^∞ .

D'après le théorème d'inversion locale, on obtient :

Corollaire 2.3 *Il existe un voisinage ouvert U_0 de 0 dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ et un voisinage ouvert V_0 de I dans $GL(n, \mathbb{K})$ tels que \exp soit un difféomorphisme de U_0 sur V_0 .*

On appelle le difféomorphisme inverse, défini au voisinage de $I \in GL(n, \mathbb{K})$, le logarithme. On le note \log (ou encore \ln). Alors,

$$\forall X \text{ tel que } \|X\| < 1, \log(I + X) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{X^{p+1}}{p+1} .$$

Proposition 2.4 Pour tous $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$,

$$(4.8) \quad \exp(tX) \exp(tY) = \exp\left(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)\right).$$

Démonstration : Posons, pour t voisin de 0, $u(t) = \log(\exp(tX) \exp(tY))$. C'est une fonction analytique de t et

$$\begin{aligned} u(t) &= \log\left((I + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + O(t^3))(I + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + O(t^3))\right) \\ &= \log\left(I + t(X + Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3)\right) \\ &= t(X + Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) - \frac{t^2}{2}(X + Y)^2 + O(t^3) \\ &= t(X + Y) + \frac{t^2}{2}(XY - YX) + O(t^3). \end{aligned}$$

On peut encore exprimer les coefficients des termes en t^3, t^4, \dots . C'est ce que l'on appelle la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (voir [Naimark-Štern, page 497]).

Corollaire 2.5 L'exponentielle d'une somme peut s'exprimer par

$$\exp(X + Y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp \frac{X}{k} \exp \frac{Y}{k}\right)^k.$$

Démonstration : On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left(\exp \frac{X}{k} \exp \frac{Y}{k}\right)^k &= \left(\exp\left(\frac{1}{k}(X + Y) + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right)^k \\ &= \exp\left(X + Y + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après la continuité de l'application exponentielle.

Proposition 2.6 Pour tout $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$,

$$\exp(\operatorname{Tr} X) = \det(\exp X).$$

En particulier, l'exponentielle d'une matrice de trace nulle est une matrice de déterminant 1.

Démonstration : Sur \mathbb{C} , on triangularise la matrice X . Si X est semblable à une matrice triangulaire T , alors $\exp X$ est semblable à $\exp T$. Si les coefficients diagonaux de T sont a_1, \dots, a_n , alors les coefficients diagonaux de la matrice $\exp T$ sont e^{a_1}, \dots, e^{a_n} . D'où

$$\det(\exp X) = \prod_{i=1}^n e^{a_i} = e^{\sum_{i=1}^n a_i} = e^{\operatorname{Tr} X}.$$

Sur \mathbb{R} , la relation reste valable entre nombres réels.

Corollaire 2.7 On a

$$\frac{d}{dt} \det(\exp(tX))|_{t=0} = \operatorname{Tr} X.$$

Démonstration : Dans la proposition 2.6, on remplace X par tX et l'on dérive.

3 Sous-groupes à un paramètre de $GL(n, \mathbb{K})$

Nous allons montrer que dans le cas des sous-groupes à un paramètre du groupe des matrices inversibles, l'hypothèse de continuité entraîne la différentiabilité.

Définition 3.1 Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe topologique G est une application continue, $f : \mathbb{R} \rightarrow G$, telle que

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, f(t + s) = f(t)f(s) .$$

On dit aussi simplement *groupe à un paramètre*. La définition implique que $f(0) = e$.

Lemme 3.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ un sous-groupe à un paramètre de $GL(n, \mathbb{K})$. Alors f est dérivable.

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. L'application f est continue donc $\int_0^a f(t)dt$ existe. On a

$$\int_0^a f(t + s)dt = f(s) \int_0^a f(t)dt = \int_s^{s+a} f(t)dt .$$

Cette quantité est dérivable par rapport à s . On aura montré que f est dérivable si l'on vérifie qu'il existe une constante $a > 0$, telle que $\int_0^a f(t)dt$ est inversible. Or, puisque f est continue en 0 et $f(0) = I$,

$$\exists a > 0, |t| \leq a, \|f(t) - I\| \leq \frac{1}{2} ,$$

d'où

$$\left\| \int_0^a (f(t) - I)dt \right\| \leq \frac{a}{2}$$

et

$$\left\| \frac{1}{a} \left(\int_0^a f(t)dt \right) - I \right\| = \left\| \frac{1}{a} \int_0^a (f(t) - I)dt \right\| \leq \frac{1}{2} < 1 ,$$

donc $\int_0^a f(t)dt$ est inversible.

Proposition 3.3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ un sous-groupe à un paramètre de $GL(n, \mathbb{K})$. Il existe un unique $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(4.9) \quad f(t) = \exp(tX) .$$

Démonstration : L'unicité est claire, car f étant dérivable d'après le lemme précédent, la matrice X cherchée doit satisfaire la relation

$$(4.10) \quad \frac{d}{dt} f(t)|_{t=0} = X .$$

On a

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t + s) - f(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} f(t) \frac{f(s) - f(0)}{s} = f(t) X .$$

D'après le lemme 2.1, on voit que $f(t)$ et $\exp(tX)$ sont solution de la même équation différentielle avec la même condition initiale, $f(0) = I$.

Définition 3.4 L'élément X de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ satisfaisant (4.9) est appelé le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $t \mapsto f(t)$.

On a

$$X = f'(0)$$

et, plus généralement,

$$(4.11) \quad \forall t \in \mathbb{R}, (f(t))^{-1} f'(t) = X .$$

Exemple : Les rotations d'axe $0x$, $0y$, $0z$, respectivement, sont les groupes à un paramètre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de la forme $\exp(t\eta_i)$, $i = 1, 2, 3$, où les générateurs infinitésimaux sont les matrices η_1, η_2, η_3 définies au paragraphe 1.5.

Remarque importante : En physique, on appelle générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre $f(t)$ la matrice A vérifiant

$$f(t) = \exp(-itA) .$$

Ainsi $A = iX$. En particulier si le groupe à un paramètre est formé de transformations unitaires d'un espace de Hilbert de dimension finie, alors l'opérateur A est hermitien (auto-adjoint), alors que l'opérateur X est antihermitien. En dimension infinie, le problème est que l'opérateur A n'est pas borné en général.

4 Groupes de Lie

Définition 4.1 Un groupe de Lie linéaire est un sous-groupe fermé d'un groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

On peut identifier $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ avec un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(2m, \mathbb{R})$. En effet toute matrice A complexe $m \times m$ s'écrit $A = B + iC$, où B et C sont des matrices réelles $m \times m$ et l'application \mathbb{R} -linéaire $A \mapsto \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ sur un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ est un morphisme de groupes. Un groupe de Lie linéaire est donc un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, pour un certain n . On a donné au chapitre 1 une définition abstraite des groupes de Lie réels comme variétés de classe C^∞ , et indiqué que tout groupe de Lie linéaire est un groupe de Lie réel. Dans toute la suite, nous étudierons seulement les groupes de Lie linéaires et, par convention, nous les appellerons simplement *groupes de Lie*. (Il existe des groupes de Lie qui ne sont pas des groupes de Lie linéaires, par exemple le revêtement universel de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. La plupart des propriétés démontrées ci-dessous s'étendent au cas général.)

Au chapitre 1, on a également donné des exemples de groupes de Lie, le groupe spécial linéaire réel ou complexe en dimension n , les groupes orthogonaux et les groupes unitaires :

$$\begin{array}{ccc} \text{SO}(n) \subset \text{O}(n) & \subset \text{GL}(n, \mathbb{R}) & \overbrace{\text{SU}(n) \subset \text{U}(n)}^{\text{groupes de Lie réels}} \subset \text{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \cap & & \cap \\ \text{SL}(n, \mathbb{R}) & & \text{SL}(n, \mathbb{C}) \end{array}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le groupe additif \mathbb{R}^n est isomorphe au groupe des matrices $(n+1) \times (n+1)$ de la forme $\begin{pmatrix} I & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $x \in \mathbb{R}^n$, ou au groupe des matrices $\begin{pmatrix} e^{x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{x_n} \end{pmatrix}$, et est donc un groupe de Lie.

Le groupe des transformations affines de \mathbb{R}^n est un groupe de Lie.

Les groupes symplectiques $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$ et $\text{Sp}(n)$ sont définis par

$$\text{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \text{SL}(2n, \mathbb{C}) \mid {}^t A J A = J\},$$

$$\text{Sp}(n) = \text{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \text{U}(2n),$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, et sont des groupes de Lie.

5 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie, c'est-à-dire un sous-groupe fermé de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. On considère

$$\mathfrak{g} = \{X = \gamma'(0) \mid \gamma : \mathcal{I} \rightarrow G, \text{ de classe } C^1, \gamma(0) = I\},$$

où \mathcal{I} est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0. C'est l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes paramétrées de classe C^1 tracées sur G et passant par I pour la valeur 0 du paramètre. On va montrer que \mathfrak{g} est non seulement un espace vectoriel réel, mais aussi une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Théorème 5.1 (i) \mathfrak{g} est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

(ii) $X \in \mathfrak{g}$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G$.

(iii) Si $X \in \mathfrak{g}$ et si $g \in G$, alors $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$.

(iv) \mathfrak{g} est stable par le commutateur des matrices.

Démonstration : (i) Soit $\gamma : \mathcal{I} \rightarrow G$, de classe C^1 , $\gamma(0) = I$, $\gamma'(0) = X$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(\lambda t)$ a λX pour vecteur tangent en 0. Donc \mathfrak{g} est stable par multiplication par les scalaires réels. Soient $\gamma_i : \mathcal{I} \rightarrow G$, $i = 1, 2$, de classe C^1 , $\gamma_i(0) = I$. Soit $X_1 = \gamma_1'(0)$, $X_2 = \gamma_2'(0)$. Alors

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1(t)\gamma_2(t))|_{t=0} = X_1 + X_2.$$

Donc \mathfrak{g} est stable par addition.

(ii) Il est clair que si $\exp(tX) \in G$, alors $X = \frac{d}{dt}\exp(tX)|_{t=0} \in \mathfrak{g}$. Réciproquement, si $X \in \mathfrak{g}$, par hypothèse, $X = \frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0}$, avec $\gamma(t) \in G$. Montrons que $\exp(tX) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\gamma(\frac{t}{k}))^k$. Cela implique que $\exp(tX) \in G$ puisque $\gamma(\frac{t}{k}) \in G$, et que G est un sous-groupe fermé. Par le développement de Taylor,

$$\gamma\left(\frac{t}{k}\right) = I + \frac{t}{k}X + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

d'où

$$\log\left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right)\right) = \frac{t}{k}X + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

On en déduit

$$\left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k = \exp\left(k \log\left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right)\right)\right) = \exp\left(tX + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\gamma\left(\frac{t}{k}\right)\right)^k = \exp(tX).$$

(iii) Si $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$, alors $gXg^{-1} = \frac{d}{dt}\exp(t(gXg^{-1}))|_{t=0}$, et pour tout t , la matrice $\exp(t(gXg^{-1})) = g(\exp(tX))g^{-1}$ appartient à G , donc $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$.

(iv) Soient X et $Y \in \mathfrak{g}$. Alors, $\exp(tX) \in G$ et $\exp(tX)Y \exp(-tX) \in \mathfrak{g}$, d'après (iii). Dans l'espace vectoriel \mathfrak{g} , on considère

$$\frac{d}{dt} (\exp(tX)Y \exp(-tX))|_{t=0}.$$

Cet élément de \mathfrak{g} est $XY - YX = [X, Y]$.

Définition 5.2 L'algèbre de Lie \mathfrak{g} , espace tangent à G en I , s'appelle l'algèbre de Lie du groupe de Lie G .

La propriété (ii) du théorème 5.1 est la caractérisation fondamentale de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

La dimension de l'espace vectoriel réel \mathfrak{g} s'appelle la *dimension* du groupe de Lie G . C'est le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour paramétrer les points du groupe. (C'est aussi la dimension du groupe de Lie en tant que variété réelle.)

Si le groupe G est un sous-groupe discret de $GL(n, \mathbb{R})$, une courbe continue tracée sur G est nécessairement constante, l'algèbre de Lie du groupe est donc réduite à $\{0\}$ et la dimension du groupe est 0.

Exemples : Les algèbres de Lie de $GL(n, \mathbb{K})$, $SL(n, \mathbb{K})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ sont notées respectivement $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$. La notation $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ est cohérente avec celle précédemment introduite : c'est l'espace vectoriel de toutes les matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{K} muni du commutateur.

Proposition 5.3 • (i) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \text{Tr } X = 0\}$ est l'algèbre de Lie des matrices de trace nulle,

$$\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = n^2 - 1, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = 2(n^2 - 1).$$

- (ii) $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid {}^tX + X = 0\}$ est l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques,
 $\dim \mathfrak{so}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.
- (iii) $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid {}^tX + \overline{X} = 0\}$ est l'algèbre de Lie des matrices antihermitiennes,
 $\dim \mathfrak{u}(n) = n^2$.
- (iv) $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid {}^tX + \overline{X} = 0, \text{Tr } X = 0\}$ est l'algèbre de Lie des matrices antihermitiennes de trace nulle,
 $\dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$.

Démonstration : Dans chaque cas on exprime la condition pour que $\exp(tX)$ appartienne au groupe de Lie indiqué, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Dans certains cas, mais pas tous, où le groupe de Lie G est un sous-groupe de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, son algèbre de Lie possède une structure d'espace vectoriel complexe. C'est le cas pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, mais non pour $\mathfrak{u}(n)$.

Théorème 5.4 *L'application \exp est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans \mathfrak{g} sur un voisinage de I dans G .*

Démonstration : Soient, comme dans le corollaire 2.3, U_0 un voisinage de 0 dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et V_0 un voisinage de I dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ tels que \exp soit un difféomorphisme de U_0 sur V_0 . On considère un supplémentaire, \mathfrak{g}' , de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. On va montrer par l'absurde qu'il existe un voisinage $U'_0 \subset U_0$ de 0 dans \mathfrak{g}' tel que $X \in U'_0$ et $\exp X \in G$ impliquent $X = 0$. Supposons donc que dans tout voisinage de 0 dans \mathfrak{g}' il existe $X \neq 0$ tel que $\exp X \in G$. En particulier, $\forall n, \exists X_n \in \frac{1}{n}(U_0 \cap \mathfrak{g}'), X_n \neq 0$, tel que $\exp X_n \in G$. On construit ainsi une suite (X_n) qui tend vers 0 quand n tend vers ∞ . Posons $Y_n = \frac{X_n}{\|X_n\|}$, de sorte que $\|Y_n\| = 1$. La sphère unité étant compacte, il existe une sous-suite de (Y_n) convergente dans l'espace vectoriel \mathfrak{g}' , la limite Y ayant pour norme 1. On va montrer que $\forall t, \exp(tY) \in G$ donc $Y \in \mathfrak{g}$, ce qui fournira une contradiction puisque par hypothèse $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}' = \{0\}$. On considère la partie entière, $p_n(t)$, de $\frac{t}{\|X_n\|}$, définie par

$$\frac{t}{\|X_n\|} = p_n(t) + u_n(t) \ , \ p_n(t) \in \mathbb{Z}, \ u_n(t) \in [0, 1[.$$

Alors,

$$\exp\left(\frac{t}{\|X_n\|} X_n\right) = (\exp X_n)^{p_n(t)} \exp(u_n(t) X_n) \ ,$$

où $\exp\left(\frac{t}{\|X_n\|} X_n\right)$ tend vers $\exp(tY)$, $\exp(u_n(t) X_n)$ tend vers I car la suite $(u_n(t))$ est bornée et la suite (X_n) tend vers 0, et $(\exp X_n)^{p_n(t)}$ est dans G . C'est la contradiction cherchée.

Soit alors $\alpha : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}' \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ l'application définie par

$$\alpha(X, X') = \exp X \exp X' .$$

La différentielle en 0 de α est l'identité, donc α est un difféomorphisme local d'un produit de voisinages de 0 dans \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' respectivement, $U \times U'$, sur un voisinage W de I dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. On peut supposer $U' \subset U'_0$. Montrons que $W \cap G = \exp U$. Il est clair que

$\exp U \subset W \cap G$. D'autre part, si $g \in W \cap G$, alors $g = \exp X \exp X'$, où $X \in U \subset \mathfrak{g}$, $X' \in U'_0 \subset \mathfrak{g}'$. Or nécessairement $X' = 0$ car $X' \in U'_0$ et $\exp X' = (\exp X)^{-1}g \in G$. Donc $W \cap G \subset \exp U$.

Par définition, la *composante connexe* de l'identité, G_0 , dans G est le plus grand ensemble connexe contenu dans G et contenant I , c'est-à-dire la réunion des connexes contenant I . Évidemment, si G est connexe, $G = G_0$. On sait que G_0 est ouvert et fermé dans G . En effet, chaque composante connexe est fermée (car l'adhérence d'un connexe est connexe), et de plus chaque composante connexe est ouverte : tout point de G possède un voisinage connexe (pour I , l'image d'une boule par l'application exponentielle ; pour un élément quelconque du groupe, le translaté d'un tel voisinage) ; si $x \in G_0$, soit V un voisinage connexe de x , alors $V \subset G_0$ donc G_0 est un voisinage de x .

La composante connexe de l'identité est un sous-groupe de G . En effet, si $g \in G_0$, le translaté à gauche de G_0 par g^{-1} est homéomorphe à G_0 , donc connexe et contient I , donc contenu dans G_0 . Donc, $\forall g, g' \in G_0$, $g^{-1}g' \in G_0$, ce qui implique que G_0 est un sous-groupe, puisque G_0 contient I .

Par exemple, la composante connexe de l'identité dans $O(n)$ est $SO(n)$.

Proposition 5.5 *Tout voisinage connexe de I dans G engendre un sous-groupe de G ouvert et fermé. Ce sous-groupe contient la composante connexe G_0 de I dans G , et c'est G tout entier si G est connexe.*

Démonstration : On peut supposer que le voisinage U est ouvert. De plus, on peut supposer qu'il est symétrique, c'est-à-dire satisfait $U^{-1} = U$, car on peut remplacer l'ouvert U contenant I par $U' = U \cap U^{-1}$, qui est ouvert et contient I .

Soit H le sous-groupe engendré par U . Comme les translations sont des difféomorphismes, pour tout $g \in H$, l'ensemble gU est un ouvert contenu dans H . Donc H est ouvert.

D'autre part, tout sous-groupe ouvert H d'un groupe topologique est aussi fermé. En effet, le groupe entier est la réunion des classes modulo H et chaque classe est ouverte. Or H est le complémentaire de la réunion des classes autres que celle de l'identité. Cette réunion d'ouverts étant ouverte, on en déduit que H est fermé. Donc H est un ensemble ouvert et fermé contenant I .

Il est clair que H contient G_0 . Ceci signifie que tout élément g de G_0 est le produit d'un nombre fini d'éléments de U .

En particulier, dans un groupe de Lie connexe, G , tout voisinage de l'identité engendre G .

Corollaire 5.6 *Le sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est la composante connexe G_0 de I dans G .*

Démonstration : On sait, d'après le théorème 5.4 que l'image de l'application exponentielle contient un ouvert contenant I , c'est-à-dire est un voisinage de I .

Tout $g \in G_0$ est un produit fini $\exp X_1 \cdots \exp X_k$, $X_i \in \mathfrak{g}$. En particulier, si G est connexe, tout élément de G est un produit fini d'exponentielles.

6 Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie

Nous avons défini au paragraphe 4.1 la notion algébrique de morphisme d'algèbres de Lie. Nous allons maintenant définir les morphismes de groupes de Lie et voir la relation étroite qui existe entre les deux notions.

6.1 Différentielle d'un morphisme de groupes de Lie

Définition 6.1 Soient G et G' des groupes de Lie. Un morphisme de groupes de Lie $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes continu de G dans G' .

Théorème 6.2 Soit f un morphisme de groupes de Lie de G dans G' et soient \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' les algèbres de Lie de G et G' , respectivement.

(i) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto f(\exp(tX)) \in G'$ est un sous-groupe à un paramètre de G' .

(ii) Soit

$$(4.12) \quad \varphi(X) = \left. \frac{d}{dt} f(\exp(tX)) \right|_{t=0}.$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(4.13) \quad f(\exp(tX)) = \exp(t(\varphi(X)))$$

et φ est un morphisme d'algèbres de Lie de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}' .

Démonstration : (i) L'application $t \mapsto f(\exp(tX))$ est continue et de plus satisfait la propriété de groupe,

$$f(\exp((t+s)X)) = f(\exp(tX) \exp(sX)) = f(\exp(tX)) f(\exp(sX)).$$

C'est donc un sous-groupe à un paramètre de G' , et d'après le lemme 3.2, on peut dériver l'application $t \mapsto f(\exp(tX))$.

(ii) Comme

$$\varphi(X) = \left. \frac{d}{dt} f(\exp(tX)) \right|_{t=0}$$

est le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre, $t \mapsto f(\exp(tX))$, on a $f(\exp(tX)) = \exp(t\varphi(X))$, et, en particulier, $f(\exp X) = \exp(\varphi(X))$.

Montrons que φ est \mathbb{R} -linéaire. Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(sX) = s\varphi(X)$. En effet, $t \mapsto f(\exp(t(sX)))$ est un groupe à paramètre de générateur infinitésimal,

$$\left. \frac{d}{dt} f(\exp(tsX)) \right|_{t=0} = s \left. \frac{d}{du} f(\exp(uX)) \right|_{u=0} = s\varphi(X).$$

Or ce générateur infinitésimal est $\varphi(sX)$ par définition. Donc $\varphi(sX) = s\varphi(X)$.

Montrons que φ est additif. Soient X et $Y \in \mathfrak{g}$. D'une part, l'application $t \mapsto f(\exp(t(X+Y)))$ est un sous-groupe à un paramètre de G' , de générateur infinitésimal $\varphi(X+Y)$. D'autre part, en utilisant le corollaire 2.5 et la continuité de f , on obtient

$$\exp(t\varphi(X+Y)) = f(\exp(t(X+Y))) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(\left(\exp\left(\frac{t}{k}X\right) \exp\left(\frac{t}{k}Y\right)\right)^k\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(f\left(\exp\left(\frac{t}{k}X\right)\right) f\left(\exp\left(\frac{t}{k}Y\right)\right) \right)^k \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(\frac{t}{k}\varphi(X)\right) \exp\left(\frac{t}{k}\varphi(Y)\right) \right)^k,
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{k}\varphi(X)$ est le générateur infinitésimal de $t \mapsto f(\exp(\frac{t}{k}X))$. Donc

$$\exp(t\varphi(X + Y)) = \exp(t(\varphi(X) + \varphi(Y))) .$$

D'où

$$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y) .$$

Il reste à montrer que φ préserve les commutateurs. Montrons d'abord que

$$\forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}, \varphi(gXg^{-1}) = f(g)\varphi(X)(f(g))^{-1} .$$

En effet

$$\begin{aligned}
\exp(t\varphi(gXg^{-1})) &= f(\exp(g(tX)g^{-1})) = f(g \exp(tX)g^{-1}) \\
&= f(g)f(\exp(tX))f(g^{-1}) = f(g) \exp(t\varphi(X)) (f(g))^{-1} \\
&= \exp(tf(g)\varphi(X)f(g^{-1}))
\end{aligned}$$

d'où, pour tout $Y \in \mathfrak{g}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\exp(tY) X \exp(-tY)) = f(\exp(tY))\varphi(X)f(\exp(-tY)) .$$

En dérivant en 0, l'application φ étant linéaire, on obtient la relation cherchée,

$$\varphi(YX - XY) = \varphi(Y)\varphi(X) - \varphi(X)\varphi(Y) .$$

Définition 6.3 *Le morphisme d'algèbres de Lie φ défini par (4.12) est appelé la différentielle du morphisme de groupes de Lie f , et noté Df .*

On a donc, par définition,

$$(4.14) \quad (Df)(X) = \frac{d}{dt} f(\exp(tX))|_{t=0} .$$

Inversement, si le groupe de Lie G est connexe et simplement connexe, étant donné un morphisme d'algèbres de Lie réelles φ , de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}' , il existe un unique morphisme de groupes de Lie de G dans G' dont la différentielle est φ (voir [Rossmann, page 83] ou [Naimark-Štern, page 505]).

6.2 Différentielle d'une représentation d'un groupe de Lie

On se borne ici au cas des représentations de dimension finie. Si E est un espace de Hilbert réel ou complexe, de dimensions finie, $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe de Lie (réel).

Définition 6.4 *On appelle représentation d'un groupe de Lie, G , un morphisme de groupes continu de G dans $\mathrm{GL}(E)$, où E est un espace de Hilbert de dimension finie, réel ou complexe.*

Soit ρ une représentation d'un groupe de Lie G dans un espace vectoriel de dimension finie. On désigne par $D\rho$ la différentielle du morphisme de groupes de Lie $\rho : G \rightarrow \text{GL}(E)$. C'est un morphisme d'algèbres de Lie de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(E)$ (en particulier dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ si $E = \mathbb{K}^n$). Donc $D\rho$ est une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On a, par définition,

$$(4.15) \quad (D\rho)(X) = \left. \frac{d}{dt} \rho(\exp(tX)) \right|_{t=0} .$$

En d'autres termes, $\rho(\exp(tX))$ est un sous-groupe à un paramètre de $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, de générateur infinitésimal $(D\rho)(X)$ et l'on a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\rho(\exp(tX)) = \exp(t(D\rho)(X)) .$$

La définition suivante est donc bien justifiée.

Définition 6.5 Soit ρ une représentation d'un groupe de Lie G dans un espace vectoriel de dimension finie, E . On appelle différentielle de la représentation ρ la représentation d'algèbre de Lie, $D\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$, définie par (4.15).

Théorème 6.6 (i) Si $F \subset E$ est invariant par ρ , alors F est invariant par $D\rho$.

(ii) Si $D\rho$ est irréductible, ρ est irréductible.

(iii) Si $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace de Hilbert complexe de dimension finie et si (E, ρ) est unitaire, alors la représentation d'algèbre de Lie $(E, D\rho)$ est antihermitienne.

(iv) Si $\rho \sim \rho'$, alors $D\rho \sim D\rho'$.

Les réciproques sont vraies si G est connexe.

Démonstration : (i) Si $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall t \in \mathbb{R}$, F est invariant par $\rho(\exp(tX))$, alors F est invariant par $(D\rho)(X)$.

(ii) Si F est invariant par ρ , alors F est invariant par $D\rho$.

(iii) On a, pour tous $X \in \mathfrak{g}, x, y \in E$,

$$\left. \frac{d}{dt} (\rho(\exp(tX))x | \rho(\exp(tX))y) \right|_{t=0} = ((D\rho)(X)x | y) + (x | (D\rho)(X)y) ,$$

donc $(D\rho)(X)$ est antihermitien si ρ est une représentation unitaire.

(iv) S'il existe $T : E \rightarrow E'$, application linéaire bijective, satisfaisant,

$$\forall g \in G, T \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ T ,$$

alors, en posant $g = \exp(tX)$ et en dérivant par rapport à t , on obtient la relation cherchée,

$$\forall X \in \mathfrak{g}, T \circ (D\rho)(X) = (D\rho')(X) \circ T .$$

Les réciproques sont valables si G est connexe car, dans ce cas, d'après le corollaire 5.6, tout élément de G est produit d'un nombre fini d'exponentielles.

Si (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) sont des représentations de G , alors

$$D(\rho_1 \oplus \rho_2) = D\rho_1 \oplus D\rho_2 ,$$

et

$$(4.16) \quad D(\rho_1 \otimes \rho_2) = D\rho_1 \otimes \text{Id}_{E_2} + \text{Id}_{E_1} \otimes D\rho_2 .$$

6.3 La représentation adjointe

Soit G un groupe de Lie et g un élément de G . On considère l'action par conjugaison par g ,

$$\mathcal{C}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G .$$

C'est un automorphisme du groupe de Lie G , et sa différentielle $D\mathcal{C}_g$ est donc un automorphisme de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , que l'on appelle l'*adjonction* par g et que l'on note Ad_g .

De plus, de la relation $\mathcal{C}_{gg'} = \mathcal{C}_g \circ \mathcal{C}_{g'}$, on tire $\text{Ad}_{gg'} = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_{g'}$, ce qui montre que $\text{Ad} : g \in G \mapsto \text{Ad}_g \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ est une représentation de G dans \mathfrak{g} .

Définition 6.7 La représentation Ad de G dans \mathfrak{g} s'appelle la représentation adjointe du groupe de Lie G .

À la représentation Ad du groupe de Lie G dans \mathfrak{g} correspond une représentation $D\text{Ad}$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} dans elle-même, appelée *représentation adjointe de l'algèbre de Lie* \mathfrak{g} , et notée ad . La relation suivante est donc valable par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $X \in \mathfrak{g}$,

$$\text{Ad}_{\exp(tX)} = \exp(t\text{ad}_X) .$$

Proposition 6.8 (i) Soient A une matrice inversible appartenant au groupe de Lie G et X une matrice appartenant à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Alors,

$$\text{Ad}_A X = A X A^{-1} .$$

(ii) Soient X et $Y \in \mathfrak{g}$. Alors,

$$\text{ad}_X Y = [X, Y] .$$

(iii) Soient X et $Y \in \mathfrak{g}$. Alors,

$$\text{ad}_{[X, Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y] .$$

Démonstration : (i) Par définition, pour $B \in G$, $\mathcal{C}_A(B) = ABA^{-1}$, donc

$$\text{Ad}_A(B) = \frac{d}{dt} A \exp(tB) A^{-1} |_{t=0} = ABA^{-1} .$$

(ii) De plus,

$$\begin{aligned} \text{ad}_X Y &= \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(tX)}(Y) |_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp(tX) Y \exp(-tX) |_{t=0} \\ &= XY - YX = [X, Y] . \end{aligned}$$

(iii) est une conséquence de l'identité de Jacobi et exprime le fait que ad est une représentation d'algèbre de Lie.

7 Références pour le chapitre 4

[Guichardet], [Barut-Ra czka], [Ludwig-Falter], [Marsden-Ratiu], [Naimark-Štern], [Rossmann], [Sattinger-Weaver].

8 Exercices pour le chapitre 4

Exercice 1. *Exponentielles et crochets de Lie.*

Soient X et Y des matrices $n \times n$ réelles ou complexes. Montrer que pour $t, s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(i) \quad \exp(tX) \exp(tY) \exp(-tX) = \exp\left(tY + t^2[X, Y] + O(t^3)\right) .$$

$$(ii) \quad \exp(tX) \exp(tY) \exp(-tX) \exp(-tY) = \exp\left(t^2[X, Y] + O(t^3)\right) .$$

$$(iii) \quad \exp t[X, Y] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(t \frac{X}{k}\right) \exp\left(\frac{Y}{k}\right) \exp\left(-t \frac{X}{k}\right) \exp\left(-\frac{Y}{k}\right) \right)^{k^2} .$$

$$(iv) \quad [X, Y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Big|_{t=s=0} (\exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX) \exp(-sY)) .$$

Exercice 2. *Algèbre de Lie de dimension infinie : champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n .*

On considère l'espace vectoriel des opérateurs différentiels linéaires du premier ordre sur \mathbb{R}^n de la forme $D = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, où chaque X^i est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n . Montrer que le commutateur munit cet espace vectoriel d'une structure d'algèbre de Lie de dimension infinie.

Exercice 3. *Algèbre de Lie de dimension infinie : champs de vecteurs sur le cercle, algèbre de Virasoro.*

On considère l'espace vectoriel E des applications de classe C^∞ du cercle $S^1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ dans \mathbb{C} et l'on pose, pour $f \in E$, $X_f = f(\theta) \frac{d}{d\theta}$.

a) Soient $f, g \in E$. Montrer qu'il existe $h \in E$ tel que $[X_f, X_g] = X_h$. En déduire que E est une algèbre de Lie, dont on notera encore $[,]$ le crochet de Lie. Calculer $[e^{ni\theta}, e^{mi\theta}]$, pour $n, m \in \mathbb{Z}$.

b) On pose $c(f, g) = \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{d^3 g}{d\theta^3} d\theta$. Soit $\tilde{E} = E \oplus \mathbb{C}$, et soit k une constante complexe. Pour tous $(f, \lambda), (g, \mu) \in \tilde{E}$, on pose

$$[(f, \lambda), (g, \mu)]_k = ([f, g], k c(f, g)) .$$

Montrer que $(\tilde{E}, [,]_k)$ est une algèbre de Lie. Calculer $[(e^{ni\theta}, \lambda), (e^{mi\theta}, \mu)]_k$, pour $n, m \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. *Non surjectivité de l'application exponentielle.*

Montrer que l'application exponentielle de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ dans $SL(2, \mathbb{C})$ n'est pas surjective. Montrer que l'application exponentielle n'est pas injective en général.

Exercice 5. *Groupe de Heisenberg.*

$$1. \text{ Soit } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $[H, X]$, $[H, Y]$ et $[X, Y]$. Calculer $\exp(tX)$, $\exp(tY)$ et $\exp(tH)$.

Montrer que $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est une bijection de \mathfrak{g} , algèbre de Lie réelle engendrée par X, Y, H , sur G , groupe des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'algèbre \mathfrak{g} est appelée *algèbre de Heisenberg* et le groupe G est appelé *groupe de Heisenberg*.

2. Quel est le centre de \mathfrak{g} ? de G ?

3. Plus généralement, on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'algèbre de Lie \mathfrak{g} engendrée par Q_k, P_k, H , $k = 1, \dots, n$, avec les relations de commutation

$$[Q_k, H] = [P_k, H] = [Q_k, Q_\ell] = [P_k, P_\ell] = 0,$$

$$[Q_k, P_\ell] = \alpha \delta_{k\ell} H,$$

où α est un scalaire non nul. (Les relations $[Q_k, P_\ell] = i\hbar \delta_{k\ell}$ sont les relations de Heisenberg.)

Montrer que cette algèbre de Lie ne possède aucune représentation irréductible de dimension finie telle que $\rho(H) \neq 0$.

Montrer que les représentations irréductibles de dimension finie telles que $\rho(H) = 0$ sont de dimension 1.

Exercice 6. *Différentielle de l'application exponentielle.*

Soit G un groupe de Lie et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Montrer que la différentielle au point $X \in \mathfrak{g}$ de l'application $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ vérifie

$$(5) \quad \exp(-X) D_X(\exp) = \frac{1 - \exp(-\text{ad}_X)}{\text{ad}_X}$$

[considérer, pour X et Y dans \mathfrak{g} , $A_s(Y) = \exp(-sX) \frac{\partial}{\partial t} \big|_{t=0} \exp(s(X + tY))$ et calculer $\frac{\partial}{\partial s} A_s(Y)$].

Exercice 7. *Forme de Killing*

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , de dimension finie. La *forme de Killing* de \mathfrak{g} est la forme \mathbb{K} -bilinéaire sur \mathfrak{g} définie par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad K(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y).$$

1. Montrer que $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$(6) \quad K([X, Y], Z) + K(Y, [X, Z]) = 0.$$

2. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Montrer que pour tout $g \in G$,

$$(7) \quad K(\text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y) = K(X, Y) .$$

On dit que K est une forme bilinéaire *invariante*.

Peut-on déduire (6) de (7) ?

3. Étudier la forme de Killing des algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(3)$.

Exercice 8. *Dimensions des groupes symplectiques.*

Calculer la dimension de l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) \mid {}^t X J + J X = 0\} ,$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. *Dérivations, représentation adjointe.*

Une *dérivation* de \mathfrak{g} est une application linéaire de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} qui satisfait, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$.

Montrer que Ad est une représentation de G dans \mathfrak{g} par automorphismes et que ad est une représentation de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} par dérivations.

Exercice 10. *Représentations unitaires.*

Soit ρ une représentation d'un groupe de Lie G dans un espace de Hilbert de dimension finie. Montrer que si la représentation $D\rho$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G est antihermitienne et si G est connexe, alors ρ est unitaire.

Exercice 11. *Différentielle d'un produit tensoriel de représentations.*

Démontrer la formule (4.16), qui signifie explicitement : pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et pour tous $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$,

$$D(\rho_1 \otimes \rho_2)(X)(v_1 \otimes v_2) = (D\rho_1)(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes (D\rho_2)(X)v_2 .$$

Exercice 12 *Formes réelles.*

Montrer que $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(2, 1)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sont des formes réelles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Sont-elles isomorphes comme algèbres de Lie réelles ?

Exercice 13. *La composante connexe de l'identité d'un groupe de Lie.*

Soient G un groupe de Lie et G_0 la composante connexe de l'identité de G .

a) Montrer que G_0 est un sous-groupe distingué de G .

b) Montrer que les groupes de Lie G et G_0 ont même algèbre de Lie.

Chapitre 5

Les groupes de Lie $SU(2)$ et $SO(3)$

1 Les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$

On sait que $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont des algèbres de Lie réelles de dimension 3. Nous allons montrer qu'elles sont isomorphes en montrant qu'il existe des bases de l'une et de l'autre où les relations de commutation sont les mêmes.

1.1 Bases de $\mathfrak{su}(2)$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \mid \overline{X} + X = 0, \text{Tr } X = 0 \right\}$ est l'espace vectoriel réel de dimension 3 des matrices complexes antihermitiennes 2×2 , de trace nulle.

a) Les trois matrices linéairement indépendantes,

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

forment une base sur \mathbb{R} de $\mathfrak{su}(2)$, et satisfont les relations de commutation,

$$[\xi_k, \xi_\ell] = \xi_m,$$

où k, ℓ, m est une permutation circulaire de 1, 2, 3.

b) En physique, on introduit les matrices de Pauli, qui sont des matrices hermitiennes,

$$\sigma_1 = -2i\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 2i\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = -2i\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elles satisfont les relations de commutation,

$$[\sigma_k, \sigma_\ell] = 2i\sigma_m.$$

On utilise également parfois les matrices,

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 = -i\xi_1, \quad \tilde{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = i\xi_2, \quad \tilde{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = -i\xi_3,$$

qui satisfont les relations de commutation,

$$[\tilde{\sigma}_k, \tilde{\sigma}_\ell] = i\tilde{\sigma}_m .$$

c) On introduit encore les matrices,

$$J_k = i\xi_k ,$$

qui satisfont les relations de commutation,

$$[J_k, J_\ell] = iJ_m ,$$

On considère aussi les matrices,

$$J_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad J_+ = J_1 + iJ_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad J_- = J_1 - iJ_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On a

$$J_3 = i\xi_3 = -\tilde{\sigma}_3 = -\frac{1}{2}\sigma_3 ,$$

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2 = i\xi_1 \mp \xi_2 = -\tilde{\sigma}_1 \pm i\tilde{\sigma}_2 = \frac{1}{2}(-\sigma_1 \pm i\sigma_2) ,$$

soit encore

$$\xi_3 = -iJ_3, \quad \xi_1 = -\frac{i}{2}(J_+ + J_-), \quad \xi_2 = -\frac{1}{2}(J_+ - J_-) .$$

Les matrices J_3, J_+, J_- satisfont les relations de commutation,

$$[J_+, J_-] = 2J_3 , \quad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm .$$

d) Enfin, on introduit aussi la base

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

de $\mathfrak{su}(2)$. On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{I}^2 = \mathcal{J}^2 = \mathcal{K}^2 = -I ,$$

$$\mathcal{I}\mathcal{J} = \mathcal{K} = -\mathcal{J}\mathcal{I} , \quad \mathcal{J}\mathcal{K} = \mathcal{I} = -\mathcal{K}\mathcal{J} , \quad \mathcal{K}\mathcal{I} = \mathcal{J} = -\mathcal{I}\mathcal{K} ,$$

et les relations de commutation de $\mathfrak{su}(2)$ s'écrivent donc

$$[\mathcal{I}, \mathcal{J}] = 2\mathcal{K} , \quad [\mathcal{J}, \mathcal{K}] = 2\mathcal{I} , \quad [\mathcal{K}, \mathcal{I}] = 2\mathcal{J} .$$

On a

$$\mathcal{I} = 2\xi_1 = 2i\tilde{\sigma}_1 = i\sigma_1 = -2iJ_1 ,$$

$$\mathcal{J} = 2\xi_2 = -2i\tilde{\sigma}_2 = -i\sigma_2 = -2iJ_2 ,$$

$$\mathcal{K} = 2\xi_3 = 2i\tilde{\sigma}_3 = i\sigma_3 = -2iJ_3 .$$

Une matrice X de $\mathfrak{su}(2)$ s'écrit $X = x_1\mathcal{I} + x_2\mathcal{J} + x_3\mathcal{K}$, soit

$$X = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_3 & -ix_3 \end{pmatrix},$$

où x_1, x_2, x_3 sont des nombres réels. On a alors $\det X = \|\vec{X}\|^2$, où $\|\vec{X}\|$ est la norme euclidienne du vecteur $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$.

Interprétation à l'aide des quaternions : Soit \mathbb{H} l'algèbre associative des quaternions, espace vectoriel de dimension 4, de base $1, i, j, k$, avec la multiplication définie par

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

L'application $i \mapsto \mathcal{I}$, $j \mapsto \mathcal{J}$, $k \mapsto \mathcal{K}$, définit une bijection de l'espace vectoriel $\mathfrak{su}(2)$ sur le sous-espace vectoriel de \mathbb{H} engendré par i, j et k , appelé espace vectoriel des quaternions purs et noté \mathbb{H}_0 . Le sous-espace vectoriel \mathbb{H}_0 n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre associative \mathbb{H} , mais \mathbb{H}_0 est une algèbre de Lie pour le commutateur et la bijection ci-dessus est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Remarque : Tous les triplets de matrices considérés ci-dessus forment des bases sur \mathbb{C} de $(\mathfrak{su}(2))^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

1.2 Bases de $\mathfrak{so}(3)$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ est l'espace vectoriel des matrices réelles antisymétriques. On a déjà vu que les matrices

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

forment une base de cette algèbre de Lie, avec les relations de commutation,

$$[\eta_k, \eta_\ell] = \eta_m.$$

Il est clair que $\eta_k \mapsto e_k$, où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 , définit un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ sur l'algèbre de Lie (\mathbb{R}^3, \wedge) .

D'autre part,

$$\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3).$$

Plus précisément un isomorphisme d'algèbres de Lie est réalisé par l'application \mathbb{R} -linéaire définie par $\xi_k \mapsto \eta_k$. On déduit de l'isomorphisme de $\mathfrak{su}(2)$ avec $\mathfrak{so}(3)$ que $(\mathfrak{so}(3))^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

On peut considérer aussi les matrices

$$\hat{J}_k = i\eta_k.$$

Dans l'isomorphisme précédent, $\tilde{\sigma}_1 \mapsto -\hat{J}_1$, $\tilde{\sigma}_2 \mapsto \hat{J}_2$, $\tilde{\sigma}_3 \mapsto -\hat{J}_3$.

1.3 Bases de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Outre les bases déjà décrites ci-dessus, on utilise le plus fréquemment la base

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui satisfait les relations de commutation

$$[H, X_{\pm}] = \pm 2X_{\pm}, \quad [X_+, X_-] = H.$$

On a

$$H = -2J_3 = -2i\xi_3 = 2\tilde{\sigma}_3 = \sigma_3, \\ X_{\pm} = -J_{\mp} = -J_1 \pm iJ_2 = -(i\xi_1 \pm \xi_2) = \tilde{\sigma}_1 \pm i\tilde{\sigma}_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2),$$

soit encore

$$J_3 = -\frac{1}{2}H, \quad J_{\pm} = -X_{\mp},$$

et

$$\mathcal{I} = i(X_+ + X_-), \quad \mathcal{J} = -(X_+ - X_-), \quad \mathcal{K} = iH.$$

2 Le morphisme de revêtement de SU(2) sur SO(3)

Nous allons voir que, bien que les algèbres de Lie des groupes de Lie SO(3) et SU(2) soient isomorphes, les groupes eux-mêmes ne le sont pas. L'un, SU(2), est connexe et simplement connexe, alors que l'autre, SO(3), est connexe mais non simplement connexe, et il existe un morphisme de groupes surjectif du premier sur le second, dont le noyau est constitué des éléments I et $-I$ de SU(2).

2.1 Le groupe SO(3)

Toute transformation orthogonale de \mathbb{R}^3 de déterminant +1 laisse fixe un vecteur unitaire a de \mathbb{R}^3 . C'est alors une rotation d'un angle $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, notée $\text{Rot}(a, t)$. Un élément de SO(3) est donc déterminé par $a \in \mathbb{R}^3, \|a\| = 1$, et $t \in [0, 2\pi[$. L'image d'un élément $x \in \mathbb{R}^3$ par $\text{Rot}(a, t)$ est

$$(5.1) \quad \text{Rot}(a, t)(x) = x + (1 - \cos t)a \wedge (a \wedge x) + \sin t a \wedge x.$$

Pour le montrer, on observe d'abord que si x est orthogonal à a , alors,

$$\text{Rot}(a, t)(x) = \cos t x + \sin t a \wedge x.$$

Puis on décompose x quelconque en $\lambda a + \mu b$, où b est orthogonal à a , et l'on utilise la linéarité de $\text{Rot}(a, t)$. D'où

$$\text{Rot}(a, t)(x) = \cos t x + (x|a)(1 - \cos t)a + \sin t a \wedge x.$$

Enfin, pour obtenir (5.1), on utilise la formule du double produit vectoriel, $u \wedge (v \wedge w) = (u|w)v - (u|v)w$, qui donne $(x|a)a = x + a \wedge (a \wedge x)$.

Deux rotations $\text{Rot}(a, t)$ et $\text{Rot}(a, t')$ sont conjuguées dans $SO(3)$ si et seulement si $t = t'$. En effet, si une rotation R laisse a invariant, alors pour tout $g \in SO(3)$, la rotation gRg^{-1} laisse ga invariant. Plus précisément, les formules précédentes montrent que

$$(5.2) \quad \forall g \in SO(3), \quad g \text{Rot}(a, t) g^{-1} = \text{Rot}(ga, t) .$$

(Il suffit d'évaluer les deux membres sur les éléments $x \in \mathbb{R}^3$.) On en déduit que, si R' est une rotation conjuguée à $\text{Rot}(a, t)$ par un élément $g \in SO(3)$, alors $R' = \text{Rot}(ga, t)$, et par conséquent R' a même angle que R et que, inversement, toute rotation $\text{Rot}(b, t)$ est conjuguée à $\text{Rot}(a, t)$ par l'élément $g \in SO(3)$ tel que $b = ga$.

Surjectivité de l'application exponentielle de $\mathfrak{so}(3)$ sur $SO(3)$: Soient η_k les générateurs infinitésimaux des groupes à un paramètre de rotations autour des axes e_k , $k = 1, 2, 3$. Par définition

$$\exp(t\eta_k) = \text{Rot}(e_k, t) .$$

Soit a un vecteur unitaire quelconque de \mathbb{R}^3 . Fixons $k = 1, 2$ ou 3 , et soit g un élément de $SO(3)$ tel que $a = g(e_k)$. Alors,

$$\text{Rot}(a, t) = g \text{Rot}(e_k, t) g^{-1} = g \exp(t\eta_k) g^{-1} = \exp(t g \eta_k g^{-1}) .$$

D'après le théorème 5.1 (iii) du chapitre 4, l'élément $g\eta_k g^{-1}$ appartient à $\mathfrak{so}(3)$. On a ainsi montré que l'application exponentielle est surjective de $\mathfrak{so}(3)$ sur $SO(3)$. On en déduit que $SO(3)$ est connexe par arcs, donc connexe et que c'est la composante connexe de l'identité dans $O(3)$. Remarquons qu'évidemment l'application exponentielle n'est pas injective de $\mathfrak{so}(3)$ dans $SO(3)$ puisque, pour $X = \eta_k$ ($k = 1, 2$ ou 3) et ℓ entier, $\exp((t + 2\ell\pi)X) = \exp(tX)$.

Soit maintenant $a \mapsto M_a$ l'application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{R}^3 dans $\mathfrak{so}(3)$ définie par $e_k \mapsto \eta_k$.

Proposition 2.1 *Pour tout $a \in \mathbb{R}^3$, de norme 1 et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$(5.3) \quad \exp(tM_a) = \text{Rot}(a, t) .$$

Démonstration : Les deux membres sont des sous-groupes à un paramètre de $SO(3)$. D'après (5.1),

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Rot}(a, t)(x) = a \wedge x ,$$

tandis que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tM_a)(x) = M_a(x) .$$

Or $M_{e_k}(x) = \eta_k(x) = e_k \wedge x$, d'où, par linéarité, $M_a(x) = a \wedge x$, ce qui démontre (5.3).

On voit aussi, en rapprochant les relations (5.2) et (5.3), que

$$\forall g \in SO(3), \quad \forall a \in \mathbb{R}^3, \quad M_{ga} = \text{Ad}_g M_a .$$

On pouvait aussi déduire ce résultat de la relation $M_a(x) = a \wedge x$ qui implique, pour $g \in SO(3)$, $M_{ga}(x) = ga \wedge x = g(a \wedge g^{-1}x) = gM_a g^{-1}(x)$.

Remarque : Malgré les différences de notation, la formule (5.3) est identique à la formule (1.49) de [Blaizot-Tolédano],

$$\mathcal{D}(\vec{u}, \alpha) = e^{-i\alpha \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{J}}},$$

où $\vec{\mathcal{J}}$ désigne le triplet de matrices $i\eta_1, i\eta_2, i\eta_3$, que nous avons notées $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ (mais qui sont notées dans ce livre J_1, J_2, J_3). Cette relation exprime que la rotation de vecteur unitaire $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et d'angle α est l'exponentielle de la matrice $-i\alpha(u_1\hat{J}_1 + u_2\hat{J}_2 + u_3\hat{J}_3)$. Cette matrice étant égale à $\alpha(u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + u_3\eta_3)$, cette relation est bien identique à (5.3).

2.2 Le groupe SU(2)

Le groupe $SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A}A = I, \det A = 1\}$ est difféomorphe à la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ car

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

En effet, de $A {}^t\bar{A} = I$, $\det A = 1$, pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on déduit $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$, $ad - bc = 1$, $\bar{a}c + \bar{b}d = 0$, d'où $ad\bar{c} + b\bar{d}d = 0$, d'où $c = -\bar{b}$ et, de même, $d = \bar{a}$. Les éléments du groupe de Lie SU(2) dépendent donc de trois paramètres réels indépendants.

Comme la sphère S^3 , le groupe SU(2) est compact, connexe et simplement connexe (tout lacet continu peut être continument déformé en un point).

Toute matrice spéciale unitaire est diagonalisable, avec matrice de passage unitaire. Comme les valeurs propres d'une matrice unitaire sont de module 1 et complexes conjuguées, pour tout $A \in SU(2)$, il existe un réel t et une matrice unitaire g tels que

$$A = g \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} g^{-1}.$$

De plus $\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}$ sont conjuguées par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans SU(2).

Surjectivité de l'application exponentielle de $\mathfrak{su}(2)$ sur SU(2) : Soit $A = g \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} g^{-1} \in SU(2)$. De la relation

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \exp(t\mathcal{K}),$$

on tire

$$A = \exp(tg\mathcal{K}g^{-1}),$$

avec $g\mathcal{K}g^{-1} \in \mathfrak{su}(2)$. Donc l'application exponentielle est surjective de $\mathfrak{su}(2)$ sur SU(2).

Lemme 2.2 Si $X \in \mathfrak{su}(2)$ et si $\det X = 1$, alors $X^2 = -I$.

Démonstration : D'après le théorème de Hamilton-Cayley, $X^2 - (\text{Tr } X)X + (\det X)I = 0$. Comme $\text{Tr } X = 0$, $X^2 = -(\det X)I$.

On peut aussi donner une démonstration directe. Écrivons $X = x_1\mathcal{I} + x_2\mathcal{J} + x_3\mathcal{K}$. Alors

$$\det X = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 .$$

D'autre part, $X^2 = -((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2)I$. D'où

$$X^2 = -(\det X)I .$$

Proposition 2.3 *Pour tout $X \in \mathfrak{su}(2)$ tel que $\det X = 1$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(tX) = \cos t I + \sin t X .$$

Démonstration : Il est clair que les deux membres ont X pour dérivée en $t = 0$. Il suffit donc de montrer que, si $\det X = 1$, l'application $t \mapsto \cos t I + \sin t X$ est un sous-groupe à un paramètre de $GL(2, \mathbb{C})$. Or,

$$\begin{aligned} & (\cos t I + \sin t X)(\cos s I + \sin s X) \\ &= \cos t \cos s I + \sin t \sin s X^2 + (\sin t \cos s + \cos t \sin s)X . \end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme, si $\det X = 1$,

$$(\cos t I + \sin t X)(\cos s I + \sin s X) = \cos(t + s)I + \sin(t + s)X .$$

On peut aussi utiliser la définition de l'exponentielle comme série de matrices et le lemme précédent.

On déduit de la proposition 2.3 ci-dessus que toute matrice de $SU(2)$ s'écrit $\alpha_0 I + \alpha_1 \mathcal{I} + \alpha_2 \mathcal{J} + \alpha_3 \mathcal{K}$, le vecteur $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de \mathbb{R}^4 étant de norme 1. Donc $SU(2)$ s'identifie aux quaternions de norme 1.

2.3 Projection de $SU(2)$ sur $SO(3)$

On considère la représentation adjointe de $SU(2)$ sur $\mathfrak{su}(2)$,

$$\text{Ad} : SU(2) \rightarrow GL(\mathfrak{su}(2)) .$$

Quand on identifie $\mathfrak{su}(2)$ à \mathbb{R}^3 par l'application \mathbb{R} -linéaire définie par

$$\mathcal{I} \mapsto e_1 , \mathcal{J} \mapsto e_2 , \mathcal{K} \mapsto e_3 ,$$

l'application Ad s'identifie à une application

$$\varphi : SU(2) \rightarrow GL(3, \mathbb{R}) .$$

C'est l'application qui, à $g \in SU(2)$, associe la matrice de Ad_g dans la base $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ de $\mathfrak{su}(2)$.

Pour tout $g \in SU(2)$, $\text{Ad}_g : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ est l'application $X \mapsto gXg^{-1}$ qui conserve les déterminants. Puisque, dans l'identification de $\mathfrak{su}(2)$ avec \mathbb{R}^3 , au déterminant d'une

matrice correspond le carré de la norme euclidienne du vecteur, $\forall g \in SU(2)$, $\varphi(g)$ conserve les normes, donc $\varphi(SU(2)) \subset O(3)$. En fait, comme φ est continue et $SU(2)$ connexe, $\varphi(SU(2)) \subset SO(3)$. On sait que l'application $\varphi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ est un morphisme de groupes. Nous allons montrer que le morphisme φ est surjectif de $SU(2)$ sur $SO(3)$, et déterminer son noyau.

Pour tout $a \in \mathbb{R}^3$, notons X_a la matrice de $\mathfrak{su}(2)$ qui lui correspond dans l'isomorphisme

$$e_1 \mapsto \mathcal{I}, e_2 \mapsto \mathcal{J}, e_3 \mapsto \mathcal{K}.$$

On peut déterminer à quelle rotation correspond $\exp(tX_a)$.

Proposition 2.4 *Pour tout $a \in \mathbb{R}^3$ de norme 1, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(\exp(tX_a)) = \text{Rot}(a, 2t).$$

Démonstration : Soit $a = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors $X_a = x_1\mathcal{I} + x_2\mathcal{J} + x_3\mathcal{K}$. On calcule

$$\text{ad}_{X_a} \mathcal{I} = x_2[\mathcal{J}, \mathcal{I}] + x_3[\mathcal{K}, \mathcal{I}] = -2x_2\mathcal{K} + 2x_3\mathcal{J},$$

$$\text{ad}_{X_a} \mathcal{J} = x_1[\mathcal{I}, \mathcal{J}] + x_3[\mathcal{K}, \mathcal{J}] = 2x_1\mathcal{K} - 2x_3\mathcal{I},$$

$$\text{ad}_{X_a} \mathcal{K} = x_1[\mathcal{I}, \mathcal{K}] + x_2[\mathcal{J}, \mathcal{K}] = -2x_1\mathcal{J} + 2x_2\mathcal{I},$$

ce qui montre que la matrice de ad_{X_a} dans la base $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ est

$$2 \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} = 2(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3) = 2M_a \in \mathfrak{so}(3).$$

Donc la matrice de $\text{Ad}_{\exp(tX_a)}$ dans cette base est $\exp(2tM_a)$. Si a est de norme 1, c'est donc $\text{Rot}(a, 2t)$.

On voit ainsi que l'application φ est surjective. La démonstration montre aussi que, dans l'identification précédente de $\mathfrak{su}(2)$ avec \mathbb{R}^3 , la matrice de ad_{ξ_k} est $\eta_k \in \mathfrak{so}(3)$.

Le noyau de Ad est $\{g \in SU(2) \mid \text{Ad}_g = \text{Id}_{\mathfrak{su}(2)}\}$. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ tel que $g\mathcal{K} = \mathcal{K}g$, $g\mathcal{I} = \mathcal{I}g$, $g\mathcal{J} = \mathcal{J}g$. On obtient $b = 0$ et a réel. Comme $\det g = 1$, $g = I$ ou $g = -I$. Donc $\ker \varphi = \{I, -I\}$.

Le morphisme φ n'est donc pas injectif, son noyau contient deux éléments. Comme φ est continu, surjectif et $SU(2)$ est simplement connexe, on conclut que le groupe $SU(2)$ est le revêtement universel, à deux feuillets, du groupe $SO(3)$.

3 Références pour le chapitre 5

[Blaizot-Tolédano], [Guichardet], [Rossmann].

4 Exercices pour le chapitre 5

Exercice 1. *Produit vectoriel et produit scalaire de \mathbb{R}^3 .*

Soient $a, b \in \mathbb{R}^3$. Montrer que, avec la notation X_a de 2.3, et les notations usuelles pour le produit vectoriel et le produit scalaire de \mathbb{R}^3 , on a $X_{a \wedge b} = X_a X_b - (a|b)I$.

Exercice 2. *Mesure de Haar du groupe $SU(2)$.*

On paramétrise $SU(2) \simeq S^3$ (moins un ensemble de mesure nulle) en posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$, et

$$a_1 = \cos\theta_3, \quad a_2 = \sin\theta_3 \cos\theta_2, \quad b_1 = \sin\theta_3 \sin\theta_2 \cos\theta_1, \quad b_2 = \sin\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1,$$

pour $\theta_1 \in]0, 2\pi[$, $\theta_2 \in]0, \pi[$, $\theta_3 \in]0, \pi[$.

a) Montrer que l'intégrale de Haar de $SU(2)$ est

$$\frac{1}{2\pi^2} \int f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \sin^2\theta_3 \sin\theta_2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3.$$

b) On pose $\theta_3 = \theta$. Montrer que l'intégrale de Haar d'une fonction centrale est

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \sin^2\theta \, d\theta.$$

Chapitre 6

Les représentations de $SU(2)$ et $SO(3)$

Pour étudier les représentations du groupe de Lie $SU(2)$, nous étudierons d'abord celles de son algèbre de Lie, $\mathfrak{su}(2)$, et en fait nous nous ramènerons à l'étude de celles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

1 Correspondance bijective entre représentations de \mathfrak{g} et de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

Proposition 1.1 *Soit $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ la complexifiée d'une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} . Toute représentation de \mathfrak{g} s'étend uniquement en une représentation de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

Démonstration : Soit (E, R) une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} dans un espace vectoriel complexe E . On pose

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, R(X + iY) = R(X) + iR(Y) \in \mathfrak{gl}(E) .$$

Un calcul utilisant les relations $R([X, X']) = R(X) \circ R(X') - R(X') \circ R(X)$ et $R([Y, Y']) = R(Y) \circ R(Y') - R(Y') \circ R(Y)$, pour $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g}$, montre que

$$R([X + iY, X' + iY']) = R(X + iY) \circ R(X' + iY') - R(X' + iY') \circ R(X + iY) .$$

D'autre part, d'une représentation de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ on déduit immédiatement une représentation de \mathfrak{g} par restriction. On voit donc qu'il y a correspondance bijective entre représentations de \mathfrak{g} et représentations de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. De plus, les représentations irréductibles se correspondent. Enfin, la relation d'équivalence sur les représentations de \mathfrak{g} correspond à la relation d'équivalence sur les représentations de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Ainsi les classes d'équivalence de représentations irréductibles de \mathfrak{g} et de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sont en correspondance bijective.

Pour déterminer les représentations de $\mathfrak{su}(2)$, nous allons donc étudier les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

2 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

2.1 Les représentations D^j

On considère $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ muni de la base H, X_+, X_- dans laquelle les relations de commutation s'écrivent

$$(6.1) \quad \begin{aligned} [H, X_{\pm}] &= \pm 2X_{\pm} \\ [X_+, X_-] &= H . \end{aligned}$$

Soit (E, R) une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. L'opérateur $R(H)$ admet au moins une valeur propre, λ , et un vecteur propre, v , pour cette valeur propre, satisfaisant $v \neq 0$ et

$$R(H)v = \lambda v .$$

D'après les relations de commutation (6.1),

$$(6.2) \quad R(H)R(X_+)v = (R(X_+)R(H) + 2R(X_+))v = (\lambda + 2)R(X_+)v ,$$

et

$$(6.3) \quad R(H)R(X_-)v = (R(X_-)R(H) - 2R(X_-))v = (\lambda - 2)R(X_-)v .$$

Comme il ne peut y avoir qu'un nombre fini de valeurs propres distinctes de $R(H)$, il existe une valeur propre λ_0 et un vecteur propre associé v_0 tels que $R(H)v_0 = \lambda_0 v_0$ et

$$(6.4) \quad R(X_+)v_0 = 0 .$$

On pose alors, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = R(X_-)^k v_0 .$$

En itérant la relation (6.3), on voit que les vecteurs v_k sont des vecteurs propres de $R(H)$ pour les valeurs propres distinctes, $\lambda_0 - 2k$,

$$R(H)v_k = (\lambda_0 - 2k)v_k .$$

Montrons, par récurrence sur k , que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$R(X_+)v_k = k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1} .$$

La relation est vérifiée pour $k = 1$ car, d'après (6.1) et (6.4),

$$R(X_+)v_1 = R(X_+)R(X_-)v_0 = R(H)v_0 = \lambda_0 v_0 .$$

Supposons la relation vraie pour k . En utilisant l'hypothèse, $v_{k+1} = R(X_-)v_k$, et la deuxième relation de (6.1), on obtient

$$\begin{aligned} R(X_+)v_{k+1} &= R(X_+)R(X_-)v_k = (R(X_-)R(X_+) + R(H))v_k \\ &= R(X_-)k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1} + (\lambda_0 - 2k)v_k \\ &= (k(\lambda_0 - k + 1) + \lambda_0 - 2k)v_k = (k + 1)(\lambda_0 - k)v_k , \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation. Les vecteurs propres v_k étant linéairement indépendants et l'espace vectoriel E étant supposé de dimension finie, il existe un entier n tel que

$$v_0 \neq 0, v_1 \neq 0, \dots, v_n \neq 0, v_{n+1} = 0.$$

D'où, en écrivant $R(X_+)v_{n+1} = 0$,

$$\lambda_0 = n.$$

On vérifie alors que, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$[R(X_+), R(X_-)]v_k = R(H)v_k,$$

$$[R(H), R(X_{\pm})]v_k = \pm 2R(X_{\pm})v_k.$$

Les vecteurs, v_0, v_1, \dots, v_n engendrent un sous-espace de E invariant par R , et comme la représentation cherchée est irréductible, ils engendrent E , qui est donc de dimension $n + 1$. En résumé, nous avons trouvé une représentation $(E^{(n)}, R^{(n)})$ de dimension $n + 1$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et une base v_0, v_1, \dots, v_n de $E^{(n)}$ telles que

$$\begin{cases} R^{(n)}(H)v_k &= (n - 2k)v_k, \\ R^{(n)}(X_-)v_k &= v_{k+1}, \\ R^{(n)}(X_+)v_k &= k(n - k + 1)v_{k-1}, \end{cases}$$

pour $0 \leq k \leq n$ et $v_{n+1} = 0$. Montrons que la représentation $(E^{(n)}, R^{(n)})$ est irréductible. Supposons que u soit un vecteur non nul d'un sous-espace vectoriel, F , de $E^{(n)}$, invariant par $R^{(n)}$. Alors,

$$u = \sum_{k=0}^n u_k v_k, \quad u_k \in \mathbb{C}.$$

Supposons $u_{k_0} \neq 0, u_{k_0+1} = \dots = u_n = 0$, où $0 < k_0 \leq n$. Alors $(R^{(n)}(X_+))^{k_0}u$ est proportionnel à v_0 avec un coefficient non nul. Donc v_0 appartient à F et par conséquent aussi tous les v_k , pour $k = 0, \dots, n$. Donc tout sous-espace invariant non nul coïncide avec l'espace entier. D'autre part, la démonstration ci-dessus a prouvé que toute représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est de la forme $(E^{(n)}, R^{(n)})$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.1 *Les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sont les $(E^{(n)}, R^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$.*

On écrit souvent, en particulier dans les ouvrages de physique, simplement Hv_k, X_-v_k, X_+v_k , en sous-entendant le nom de la représentation. Les physiciens posent $n = 2j$, avec j entier ou demi-entier, et ils utilisent plutôt la base J_3, J_+, J_- de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Ils notent (E^j, D^j) la représentation $(E^{(2j)}, R^{(2j)})$ et ils considèrent la base de $E^j = E^{(2j)}$, indexée par le nombre m , $-j \leq m \leq j$ (m est entier si j est entier, demi-entier si j est demi-entier), notée $|j, m\rangle$ et appelée *base standard pour la représentation D^j* , définie par

$$|j, m\rangle = (-1)^{j+m} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} v_{j+m}.$$

La notation provient du formalisme des “bras” et des “kets” de Dirac en mécanique quantique. Dans la base $|j, m\rangle$,

$$D^j \begin{cases} J_3|j, m\rangle &= m|j, m\rangle \\ J_+|j, m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle \\ J_-|j, m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle \end{cases}$$

soit encore

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle .$$

2.2 Opérateur de Casimir

Dans tout espace de représentation (E, R) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, on peut considérer l'opérateur $(R(J_1))^2 + (R(J_2))^2 + (R(J_3))^2$ qu'on écrit en abrégé :

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 .$$

Comme $J_+J_- = (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 - i[J_1, J_2] = J_1^2 + J_2^2 + J_3$, on a

$$J^2 = J_+J_- + J_3(J_3 - I) = J_-J_+ + J_3(J_3 + I) .$$

Il est clair que, si $R = D^j$, chaque vecteur $|j, m\rangle$ est un vecteur propre de J^2 . Plus précisément, un calcul montre que

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle .$$

On voit donc que, dans la représentation D^j , non seulement chaque vecteur $|j, m\rangle$ est un vecteur propre de J^2 , mais encore J^2 agit comme le multiple de l'identité $j(j+1)I$. L'opérateur J^2 s'appelle l'*opérateur de Casimir* de la représentation D^j . Il commute à chacun des opérateurs de la représentation D^j .

2.3 Hermiticité des opérateurs J_3 et J^2

Nous allons montrer que les opérateurs J_3 et J^2 dans la représentation (E^j, D^j) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sont hermitiens par rapport à un produit scalaire bien choisi sur E^j . On définit le produit scalaire sur E^j en imposant que $|j, m\rangle$ soit une base orthonormale. On désigne par $*$ l'adjonction des matrices, $X^* = {}^t \bar{X}$. Alors

Proposition 2.2

$$(J_+)^* = J_- , (J_-)^* = J_+ , (J_3)^* = J_3 , (J^2)^* = J^2 .$$

Démonstration : Nous utiliserons la base

$$(|j, -j\rangle, |j, -j+1\rangle, \dots, |j, j-1\rangle, |j, j\rangle) ,$$

dans cet ordre.

Proposition 2.3 *Pour tout $X \in \mathfrak{su}(2)$, la matrice de $D^j(X)$ dans la base $|j, m\rangle$ est antihermitienne. Les opérateurs de la représentation D^j de $\mathfrak{su}(2)$ sont antihermitiens pour le produit scalaire sur E^j défini par la condition que $|j, m\rangle$ soit une base orthonormale.*

En désignant ce produit scalaire par $(\cdot | \cdot)$, on a donc, pour tout $X \in \mathfrak{su}(2)$ et pour tous $x_1, x_2 \in E^j$,

$$(D^j(X)x_1 | x_2) = -(x_1 | D^j(X)x_2) .$$

3 Représentations de $SU(2)$

3.1 Les représentations \mathcal{D}^j

Nous allons étudier des représentations \mathcal{D}^j de $SU(2)$, montrer qu'elles ont pour différentielles $D\mathcal{D}^j$ les représentations D^j de $\mathfrak{su}(2)$ étudiées ci-dessus, et montrer que ce sont les seules représentations irréductibles de $SU(2)$.

Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ agit sur \mathbb{C}^2 par la représentation canonique, telle que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix} .$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3.1, il est d'usage de considérer la représentation de $SL(2, \mathbb{C})$ dans l'espace des fonctions à valeurs complexes sur \mathbb{C}^2 définie par

$$\rho_0(g)f = f \circ g^{-1} .$$

Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1, alors $g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, donc explicitement

$$(\rho_0(g)f)(z_1, z_2) = f(dz_1 - bz_2, -cz_1 + az_2) .$$

D'autre part, $\rho(g) = \rho_0(\bar{g})$ définit une autre représentation, ρ , de $SL(2, \mathbb{C})$,

$$\rho(g)f = f \circ \bar{g}^{-1} .$$

Explicitement,

$$(\rho(g)f)(z_1, z_2) = f(\bar{d}z_1 - \bar{b}z_2, -\bar{c}z_1 + \bar{a}z_2) .$$

Lemme 3.1 *En restriction à $SU(2)$, les deux représentations ρ et ρ_0 sont équivalentes.*

Démonstration : Montrons en effet que les matrices g et \bar{g} sont conjuguées dans $SU(2)$ par $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Les éléments de $SU(2)$ sont de la forme

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} , \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 ,$$

et l'on vérifie immédiatement que

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = P g P^{-1} .$$

L'application $f \mapsto f \circ P$ est donc un opérateur d'entrelacement pour ρ et ρ_0 .

Remarque : Cette équivalence de représentations ne se généralise pas à SU(n), pour $n > 2$.

On a, pour toute fonction f sur \mathbb{C}^2 et pour tout $g \in \text{SU}(2)$,

$$\rho(g)f = f \circ \bar{g}^{-1} = f \circ {}^t g ,$$

soit, explicitement,

$$(\rho(g)f)(z_1, z_2) = f(az_1 - \bar{b}z_2, bz_1 + \bar{a}z_2) .$$

On va étudier la représentation ρ en restriction à SU(2), mais elle n'est certainement pas irréductible, et l'on va mettre en évidence des sous-espaces vectoriels sur lesquels SU(2) agit de manière irréductible.

Soit V^j l'espace vectoriel des polynômes homogènes à coefficients complexes en deux variables, (z_1, z_2) , de degré $2j$, où $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Cet espace vectoriel complexe est de dimension $2j + 1$. Une base en est

$$z_1^{2j}, z_1^{2j-1}z_2, \dots, z_1^{j-m}z_2^{j+m}, \dots, z_2^{2j}, \quad -j \leq m \leq j .$$

Par exemple, ces bases sont

$$\begin{aligned} \text{si } j = \frac{1}{2}, & \quad z_1, \quad z_2 \\ \text{si } j = 1, & \quad z_1^2, \quad z_1z_2, \quad z_2^2 \\ \text{si } j = \frac{3}{2}, & \quad z_1^3, \quad z_1^2z_2, \quad z_1z_2^2, \quad z_2^3 \end{aligned}$$

Évidemment, V^j est stable par la représentation ρ de SU(2). Nous allons maintenant étudier la représentation \mathcal{D}^j de SU(2) dans V^j ainsi obtenue par restriction.

On introduit la notation

$$f_m^j(z_1, z_2) = z_1^{j-m}z_2^{j+m} .$$

Action des matrices diagonales de SU(2) : Dans la représentation \mathcal{D}^j , les matrices diagonales de SU(2) agissent de manière simple dans V^j . Posons

$$g_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \exp(\theta\mathcal{K}) = \exp(2\theta\xi_3), \quad \text{où } \xi_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .$$

Alors,

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^j(g_\theta)f_m^j)(z_1, z_2) &= f_m^j(e^{i\theta}z_1, e^{-i\theta}z_2) = (e^{i\theta})^{j-m}z_1^{j-m}(e^{-i\theta})^{j+m}z_2^{j+m} \\ &= e^{-2mi\theta}z_1^{j-m}z_2^{j+m} = e^{-2mi\theta}f_m^j(z_1, z_2) , \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{D}^j(g_\theta)f_m^j = e^{-2mi\theta}f_m^j .$$

Chaque f_m^j est donc un vecteur propre de $\mathcal{D}^j(g_\theta)$ pour la valeur propre $e^{-2mi\theta}$.

Calcul de la différentielle de \mathcal{D}^j : Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SU}(2)$, alors, pour tout polynôme f à deux variables,

$$(\rho(g)f)(z_1, z_2) = (f \circ {}^t g)(z_1, z_2) = f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) .$$

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $g(t) = \exp(tX) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. Alors $g(0) = I$ et $g'(0) = X$, donc $a(0) = d(0) = 1$, $b(0) = c(0) = 0$ et

$$a'(0) = \alpha, \quad b'(0) = \beta, \quad c'(0) = \gamma, \quad d'(0) = \delta.$$

Donc

$$\begin{aligned} ((D\rho)(X)f)(z_1, z_2) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\rho(g(t))f)(z_1, z_2) \\ &= (\alpha z_1 + \gamma z_2) \partial_1 f(z_1, z_2) + (\beta z_1 + \delta z_2) \partial_2 f(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Ainsi

$$((D\rho)(\xi_3)f)(z_1, z_2) = \frac{i}{2} z_1 \partial_1 f - \frac{i}{2} z_2 \partial_2 f,$$

$$((D\rho)(\xi_1)f)(z_1, z_2) = \frac{i}{2} z_2 \partial_1 f + \frac{i}{2} z_1 \partial_2 f,$$

$$((D\rho)(\xi_2)f)(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2 \partial_1 f - \frac{1}{2} z_1 \partial_2 f.$$

On va étudier l'action $D\rho$ en restriction à V^j . Il suffit de déterminer la valeur des opérateurs $DD^j(\xi_k)$, pour $k = 1, 2, 3$, sur les vecteurs de base f_m^j , $-j \leq m \leq j$, de V^j . On a

$$(DD^j)(\xi_3)f_m^j = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathcal{D}^j(\exp(t\xi_3)f_m^j)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{-itm} f_m^j,$$

d'où

$$(DD^j)(\xi_3)f_m^j = -imf_m^j.$$

En utilisant

$$\partial_1 f_m^j = (j - m) z_1^{j-m-1} z_2^{j+m},$$

$$\partial_2 f_m^j = (j + m) z_1^{j-m} z_2^{j+m-1},$$

on obtient

$$(DD^j)(\xi_1)f_m^j = \frac{i}{2} ((j - m)f_{m+1}^j + (j + m)f_{m-1}^j),$$

$$(DD^j)(\xi_2)f_m^j = \frac{1}{2} ((j - m)f_{m+1}^j - (j + m)f_{m-1}^j).$$

On peut alors considérer le prolongement de $D\rho$ à la complexifiée de $\mathfrak{su}(2)$, pour lequel

$$(D\rho)(J_3)f = i(D\rho)(\xi_3)f = -\frac{1}{2}(z_1 \partial_1 f - z_2 \partial_2 f),$$

$$(D\rho)(J_+)f = (i(D\rho)(\xi_1) - (D\rho)(\xi_2))f = -z_2 \partial_1 f,$$

$$(D\rho)(J_-)f = (i(D\rho)(\xi_1) + (D\rho)(\xi_2))f = -z_1 \partial_2 f,$$

d'où

$$(DD^j)(J_3)f_m^j = mf_m^j,$$

$$(DD^j)(J_+)f_m^j = -(j - m)f_{m+1}^j,$$

$$(DD^j)(J_-)f_m^j = -(j + m)f_{m-1}^j.$$

On pose

$$|j, m\rangle = (-1)^{j+m} \frac{1}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} f_m^j.$$

On a alors

$$(DD^j) \begin{cases} J_3|j, m\rangle &= m|j, m\rangle \\ J_+|j, m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle \\ J_-|j, m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle \end{cases}$$

On déduit immédiatement de ces formules que la différentielle, DD^j , de la représentation (V^j, \mathcal{D}^j) de SU(2) est équivalente à la représentation D^j de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, car elles sont les restrictions d'une même représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. On a donc montré la proposition suivante.

Proposition 3.2 *La différentielle de la représentation \mathcal{D}^j de SU(2) s'identifie à la représentation D^j de $\mathfrak{su}(2)$.*

Désormais, nous identifierons les espaces vectoriels supports, E^j et V^j , de dimension $2j+1$.

Proposition 3.3 *La représentation (V^j, \mathcal{D}^j) de SU(2) est unitaire pour le produit scalaire sur V^j défini en imposant que $|j, m\rangle$ soit une base orthonormale.*

Ce résultat est la conséquence de la proposition 2.3 et du fait que SU(2) est connexe. Donc, $\forall g \in \text{SU}(2), \forall f_1, f_2 \in V^j, (\mathcal{D}^j(g)f_1 | \mathcal{D}^j(g)f_2) = (f_1 | f_2)$.

Proposition 3.4 *Pour tout j , entier ou demi-entier, (V^j, \mathcal{D}^j) est une représentation irréductible de SU(2).*

Démonstration : La proposition résulte du fait que la différentielle de \mathcal{D}^j est une représentation irréductible. En effet, si V est un sous-espace vectoriel de V^j invariant par \mathcal{D}^j , il l'est par $D^j = DD^j$, donc V est trivial.

Corollaire 3.5 *Toute représentation irréductible de SU(2) est équivalente à l'une des représentations (V^j, \mathcal{D}^j) , $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.*

Démonstration : On sait, d'après le théorème 3.12 que toute représentation irréductible de SU(2) est de dimension finie. On a vu que toute représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{su}(2)$ est l'une des D^j , $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Comme SU(2) est connexe, cela implique le résultat.

3.2 Caractère de \mathcal{D}^j

Par définition, pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $\chi_j(\theta) = \chi_{\mathcal{D}^j}(\theta) = \sum_{m=-j}^j e^{-2mi\theta}$. On a donc

$$\chi_j(\theta) = \frac{\sin(2j+1)\theta}{\sin \theta}.$$

3.3 Caractère de $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$

On peut exprimer $\chi_j(\theta)$ en fonction de $X = e^{2i\theta}$, pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Si $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$,

$$\chi_j(\theta) = \sum_{m=-j}^j X^m = \sum_{p=0}^{2j} X^{p-j} = X^{-j} \frac{X^{2j+1} - 1}{X - 1}.$$

D'où

$$\chi_j(\theta) = \frac{X^{j+1} - X^{-j}}{X - 1}.$$

D'autre part $\chi_j(0) = \chi_j(\pi) = 2j + 1$, qui est la dimension de la représentation.

Soient j_1 et $j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. On a, pour $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$,

$$\begin{aligned} \chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) &= \left(\sum_{m=-j_1}^{j_1} X^m \right) \left(\frac{X^{j_2+1} - X^{-j_2}}{X - 1} \right) \\ &= \frac{1}{X - 1} \left(\sum_{m=-j_1}^{j_1} X^{m+j_2+1} - \sum_{m=-j_1}^{j_1} X^{m-j_2} \right). \end{aligned}$$

Posons $m = j_1 - k$ dans la première somme et $m = k - j_1$ dans la deuxième. On obtient

$$\chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) = \frac{1}{X - 1} \left(\sum_{k=0}^{2j_1} X^{j_1+j_2+1-k} - \sum_{k=0}^{2j_1} X^{-j_1-j_2+k} \right)$$

Supposons $j_1 \leq j_2$. Alors $0 \leq k \leq 2j_1$ implique $j_1 + j_2 - k \geq 0$, donc

$$\chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) = \sum_{k=0}^{2j_1} \chi_{j_1+j_2-k}(\theta) = \chi_{j_1+j_2}(\theta) + \chi_{j_1+j_2-1}(\theta) + \cdots + \chi_{j_2-j_1}(\theta).$$

Pour $\theta = 0$ ou π , le membre de gauche est $\chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. D'autre part, dans le membre de droite, il y a $2j_1 + 1$ termes dont la somme est

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2j_1} \chi_{j_2-j_1+k}(0) &= \sum_{k=0}^{2j_1} (2(j_2 - j_1) + 1 + 2k) \\ &= (2j_1 + 1)(2(2j_2 - j_1) + 1) + 2j_1(2j_1 + 1) \\ &= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1). \end{aligned}$$

La formule est donc encore valable dans ce cas. On a ainsi démontré la formule

$$(6.5) \quad \chi_{j_1}\chi_{j_2} = \chi_{|j_2-j_1|} + \chi_{|j_2-j_1|+1} + \cdots + \chi_{j_1+j_2}.$$

3.4 Formule de Clebsch-Gordan

On déduit de (6.5) et de la relation 2.3 du chapitre 2, la décomposition du produit tensoriel $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$ en somme directe de représentations irréductibles, dite *formule de Clebsch-Gordan*,

$$(6.6) \quad \mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} = \mathcal{D}^{|j_2-j_1|} \oplus \mathcal{D}^{|j_2-j_1|+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}^{j_1+j_2}.$$

4 Représentations de $SO(3)$

Rappelons l'existence du morphisme φ de $SU(2)$ sur $SO(3)$, de noyau $\{I, -I\}$, étudié au paragraphe 5.2.3. Si (E, ρ) est une représentation de $SU(2)$, alors ρ se factorise par la projection φ si et seulement si

$$(6.7) \quad \rho(-I) = \rho(I) = \text{Id}_E.$$

Si ρ se factorise en $\sigma \circ \varphi$, où $\sigma : \mathrm{SO}(3) \rightarrow \mathrm{GL}(E)$, alors σ est une représentation de $\mathrm{SO}(3)$, et ρ est irréductible si et seulement si σ est irréductible. La représentation \mathcal{D}^j de $\mathrm{SU}(2)$ satisfait la condition (6.7) si et seulement si j est entier. En effet $-I = g_\pi$ et $\mathcal{D}^j(g_\pi)f_m^j = e^{-2i\pi m}f_m^j$; le facteur scalaire est 1 si et seulement si m est entier, donc si et seulement si j est entier. On voit donc que les représentations obtenues par factorisation de

$$\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2, \dots$$

sont les représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(3)$. En conclusion :

Théorème 4.1 *Toute représentation irréductible de $\mathrm{SO}(3)$ est équivalente à l'une des représentations (V^j, \mathcal{D}^j) , $j \in \mathbb{N}$.*

5 Références pour le chapitre 6

[Basdevant-Dalibard], [Fulton-Harris], [Guichardet], [Knapp], [Rougé], [Sternberg].

6 Exercices pour le chapitre 6

Exercice 1. *Les représentations $D^{\frac{1}{2}}$ et D^1 .*

a) Écrire les matrices $R^{(1)}(H)$, $R^{(1)}(X_+)$, $R^{(1)}(X_-)$ de la représentation $R^{(1)} = D^{\frac{1}{2}}$ dans la base v_k .

Écrire les matrices $D^{\frac{1}{2}}(J_3)$, $D^{\frac{1}{2}}(J_+)$, $D^{\frac{1}{2}}(J_-)$ de la représentation $D^{\frac{1}{2}}$ dans la base f_m^j . Même question pour ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

b) Mêmes questions avec $R^{(2)} = D^1$.

c) La représentation $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$ est-elle équivalente à la représentation standard de $\mathrm{SU}(2)$ sur \mathbb{C}^2 ?

La représentation D^1 est-elle équivalente à la complexifiée de la représentation standard de $\mathfrak{so}(3)$ sur \mathbb{R}^3 ?

Exercice 2. *Opérateur de Casimir.*

a) Exprimer l'opérateur de Casimir de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ en fonction de H, X_+, X_- .

b) Exprimer $J_+J_- + J_-J_+$, $(J_3)^2$ et J^2 comme opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à 2 sur les polynômes homogènes à deux variables de degré $2j$.

Exercice 3. *Une application de l'identité d'Euler.*

En utilisant l'identité d'Euler pour les polynômes homogènes de degré $2j$, montrer que $(DD^j)(J_3)f = (j - z_1\partial_1)f = (z_2\partial_2 + j)f$.

Exercice 4. *Formule de Clebsch-Gordan.*

Décomposer en somme directe de représentations irréductibles

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{D}^1 \otimes \mathcal{D}^1, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^1 \otimes \mathcal{D}^{\frac{3}{2}}.$$

Chapitre 7

Les représentations de $SU(3)$ et les quarks

1 Rappels sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, représentations de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et de $SU(3)$

1.1 Rappels sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$

Dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, on désigne par \mathfrak{h} la sous-algèbre de Lie abélienne, c'est-à-dire commutative, formée des matrices diagonales de trace nulle. Remarquons que \mathfrak{h} est maximale parmi les sous-algèbres de Lie abéliennes de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. En effet, si une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ contient \mathfrak{h} et une matrice non diagonale, elle est non abélienne car aucune matrice non diagonale ne commute avec toutes les matrices diagonales de trace nulle. La sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ est appelée une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

On désigne par E_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, la matrice ayant 1 sur la i -ème ligne et la j -ème colonne et 0 ailleurs. On pose $H_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1}$. Rappelons qu'une base de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ est formée des E_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$, et des H_i , $i = 1, \dots, n-1$, où les matrices H_i , $i = 1, \dots, n-1$, forment une base de \mathfrak{h} .

On a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, d'où les relations de commutation de ces matrices,

$$(7.1) \quad [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj} ,$$

$$(7.2) \quad [H, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(H)E_{ij} ,$$

où l'on a noté $\lambda_i : H \mapsto \lambda_i(H)$ l'application linéaire de \mathfrak{h} dans \mathbb{C} qui associe à toute matrice diagonale de trace nulle l'élément qui se trouve sur la i -ème ligne.

1.2 Cas de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Dans le cas de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, la sous-algèbre de Cartan, \mathfrak{h} , est de dimension 2 et a pour base

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

On peut prendre pour base de l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures strictes,

$$E_1 = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et, pour base de l'espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures strictes,

$$F_1 = {}^t E_1 = E_{21}, \quad F_2 = {}^t E_2 = E_{32}, \quad F_3 = {}^t E_3 = E_{31}.$$

On pose

$$H_3 = H_1 + H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les relations de commutation s'écrivent :

$$[H_1, H_2] = 0, \quad [E_i, F_i] = H_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_1, E_3] = 0, \quad [E_2, E_3] = 0,$$

et

$$[F_1, F_2] = -F_3, \quad [F_1, F_3] = 0, \quad [F_2, F_3] = 0,$$

et

$$[E_1, F_2] = 0, \quad [E_2, F_1] = 0,$$

$$[E_1, F_3] = -F_2, \quad [E_3, F_1] = -E_2,$$

$$[E_2, F_3] = F_1, \quad [E_3, F_2] = E_1.$$

Les relations de commutation restantes vont nous intéresser plus particulièrement. Les unes expriment que E_1, E_2 et E_3 sont des vecteurs propres communs des endomorphismes ad_{H_1} et ad_{H_2} de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$,

$$[H_1, E_1] = 2E_1, \quad [H_2, E_1] = -E_1,$$

$$[H_1, E_2] = -E_2, \quad [H_2, E_2] = 2E_2,$$

$$[H_1, E_3] = E_3, \quad [H_2, E_3] = E_3.$$

Les autres expriment que, de même, F_1, F_2 et F_3 sont des vecteurs propres communs des endomorphismes ad_{H_1} et ad_{H_2} ,

$$[H_1, F_1] = -2F_1, \quad [H_2, F_1] = F_1,$$

$$[H_1, F_2] = F_2, \quad [H_2, F_2] = -2F_2,$$

$$[H_1, F_3] = -F_3, \quad [H_2, F_3] = -F_3.$$

On appellera $\alpha_1(H_1)$ (resp., $\alpha_1(H_2)$) la valeur propre de ad_{H_1} (resp., ad_{H_2}) correspondant au vecteur propre E_1 . On a donc, d'après ce qui précède,

$$\alpha_1(H_1) = 2, \quad \alpha_1(H_2) = -1.$$

En fait, tout élément de la sous-algèbre de Cartan, \mathfrak{h} , s'écrit comme une combinaison linéaire de H_1 et de H_2 et l'on définit ainsi une forme linéaire α_1 sur \mathfrak{h} . Les valeurs de cette forme linéaire sur les vecteurs de base (H_1, H_2) sont $(2, -1)$. Ce sont aussi les composantes de cette forme linéaire dans la base duale de la base (H_1, H_2) , par définition de la notion de base duale. On introduit de même la notation $\alpha_2(H)$ pour les valeurs propres de $H \in \mathfrak{h}$ correspondant au vecteur propre E_2 ,

$$\alpha_2(H_1) = -1, \quad \alpha_2(H_2) = 2 .$$

Enfin, soit $\alpha_3(H)$ la valeur propre de $H \in \mathfrak{h}$ correspondant au vecteur propre E_3 ,

$$\alpha_3(H_1) = 1, \quad \alpha_3(H_2) = 1 .$$

On a évidemment

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

Par définition,

$$[H_i, E_j] = \alpha_j(H_i)E_j, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 3 ,$$

et l'on voit aussi que

$$[H_i, F_j] = -\alpha_j(H_i)F_j, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 3 .$$

Les formes linéaires, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$, sur \mathfrak{h} jouent un rôle important dans la théorie des représentations. On les appelle les *racines* de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Ci-dessus nous avons introduit la forme linéaire sur \mathfrak{h} , notée λ_i , qui associe à toute matrice appartenant à \mathfrak{h} l'élément qui se trouve sur la i -ème ligne. On voit immédiatement, directement ou d'après (7.2), que

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \alpha_3 = \lambda_1 - \lambda_3 .$$

1.3 Les bases (I_3, Y) et (I_3, T_8) de \mathfrak{h}

Dans la sous-algèbre de Cartan, \mathfrak{h} , de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ on introduit une nouvelle base, (I_3, Y) , définie par

$$I_3 = \frac{1}{2}H_1, \quad Y = \frac{1}{3}(H_1 + 2H_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

On introduit aussi

$$T_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} ,$$

et l'on considère également la base (I_3, T_8) de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Remarque : Dans [Blaizot-Tolédano], I_3 est désigné par T_3 . La quantité $Q = \frac{1}{2}Y + I_3$ est également introduite. Les valeurs propres des éléments T_3, Y et Q de l'algèbre de symétrie dans une représentation correspondent à la troisième composante de l'isospin, à l'hypercharge et à la charge électrique, respectivement.

1.4 Représentations de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et de $SU(3)$

Il y a bijection entre les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et celles de $\mathfrak{su}(3)$, par complexification et, inversement, par restriction.

De plus, les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(3)$ sont en correspondance bijective avec celles de $SU(3)$, car ce groupe est connexe et simplement connexe (voir [Rossmann, page 122]). On peut aussi remarquer que l'application exponentielle est surjective, car le groupe est compact et connexe.

2 Représentation adjointe, racines

Dans la suite on s'intéresse aux représentations du groupe de Lie $SU(3)$ et, d'après ce qui précède, il s'agit d'étudier les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, laquelle est de dimension 8. On reprend les notations de 1.1. Les relations de commutation de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

impliquent : si $H = \begin{pmatrix} \lambda_1(H) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(H) \end{pmatrix}$, alors $[H, E_{ij}] = (\lambda_i(H) - \lambda_j(H))E_{ij}$. Les

racines de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ sont donc données par le tableau suivant :

racine	relations		base(I_3, Y)	base(I_3, T_8)
α_1	$[I_3, E_1] = E_1$	$[Y, E_1] = 0$	$(1, 0)$	$(1, 0)$
α_2	$[I_3, E_2] = -\frac{1}{2}E_2$	$[Y, E_2] = E_2$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
α_3	$[I_3, E_3] = \frac{1}{2}E_3$	$[Y, E_3] = E_3$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
α'_1	$[I_3, F_1] = -F_1$	$[Y, F_1] = 0$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$
α'_2	$[I_3, F_2] = \frac{1}{2}F_2$	$[Y, F_2] = -F_2$	$(\frac{1}{2}, -1)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
α'_3	$[I_3, F_3] = -\frac{1}{2}F_3$	$[Y, F_3] = -F_3$	$(-\frac{1}{2}, -1)$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Les relations suivantes sont évidentes :

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha'_1 = -\alpha_1, \quad \alpha'_2 = -\alpha_2, \quad \alpha'_3 = -\alpha_3.$$

La première peut aussi se voir comme une conséquence de l'identité de Jacobi, puisque

$$\begin{aligned} [H_i, E_3] &= [H_i, [E_1, E_2]] = [[H_i, E_1], E_2] + [E_1, [H_i, E_2]] \\ &= \alpha_1(H_i)[E_1, E_2] + \alpha_2(H_i)[E_1, E_2] = (\alpha_1 + \alpha_2)(H_i)E_3. \end{aligned}$$

Rappelons aussi que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_1 - \lambda_2, \\ \alpha_2 &= \lambda_2 - \lambda_3. \end{aligned}$$

Nous dessinons maintenant les racines de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ dans le plan rapporté aux axes I_3 et T_8 . On voit que ces six racines forment un hexagone régulier, ce qui n'aurait pas été le cas si l'on avait utilisé la base (I_3, Y) . Techniquement 0 n'est pas appelé une racine mais, pour tout $H \in \mathfrak{h}$, 0 est valeur propre double de l'endomorphisme ad_H . C'est pourquoi nous faisons figurer le point 0 comme un point double (point entouré d'un petit cercle). La représentation adjointe est de dimension 8 et nous la désignerons dans la suite de ce

chapitre par 8. Dans les paragraphes suivants, nous parlerons plus généralement des *poids* des représentations de l'algèbre $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et nous verrons que *les racines sont les poids de la représentation adjointe*.

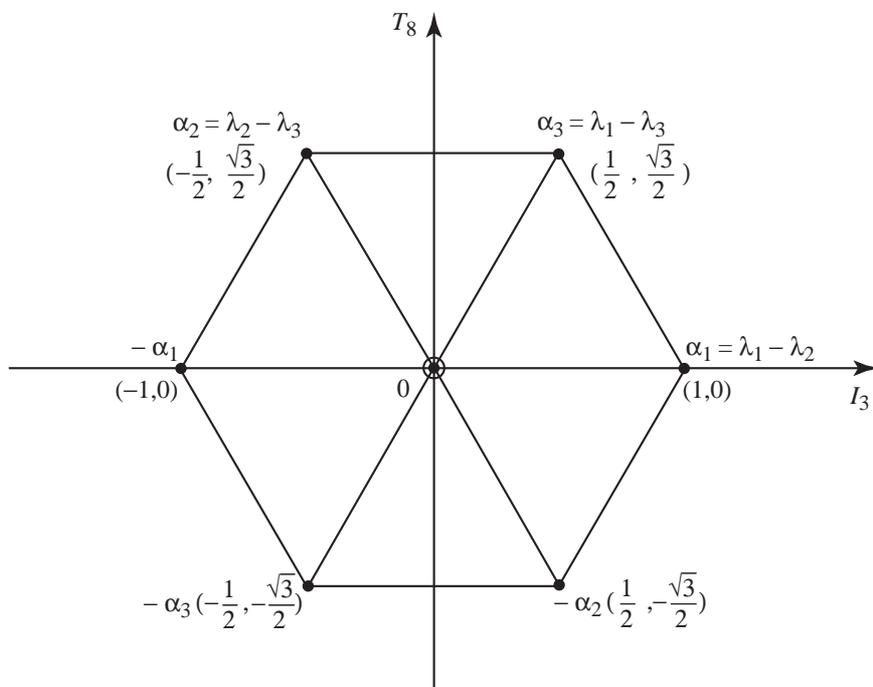


Figure 1. La représentation 8.

3 Représentation standard (fondamentale) et sa contragrédiente

3.1 Représentation standard (fondamentale)

Nous considérons maintenant la représentation standard, appelée en physique, représentation fondamentale. On a

$$\begin{aligned} H_1 e_1 &= e_1, & H_2 e_1 &= 0, \\ H_1 e_2 &= -e_2, & H_2 e_2 &= e_2, \\ H_1 e_3 &= 0, & H_2 e_3 &= -e_3. \end{aligned}$$

Par définition les *poids* de cette représentation sont les formes linéaires, λ_1, λ_2 et λ_3 , sur \mathfrak{h} , satisfaisant

$$H e_i = \lambda_i(H) e_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

donc dans la base (H_1, H_2) les composantes des trois poids sont

$$\lambda_1 = (1, 0), \quad \lambda_2 = (-1, 1), \quad \lambda_3 = (0, -1).$$

D'où la table suivante :

poids	relations	base(I_3, Y)	base(I_3, T_8)	
λ_1	$I_3 e_1 = \frac{1}{2} e_1$ $Y e_1 = \frac{1}{3} e_1$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$	u
λ_2	$I_3 e_2 = -\frac{1}{2} e_2$ $Y e_2 = \frac{1}{3} e_2$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$	d
λ_3	$I_3 e_3 = 0$ $Y e_3 = -\frac{2}{3} e_3$	$(0, -\frac{2}{3})$	$(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	s

Il y a donc trois vecteurs propres e_1, e_2, e_3 linéairement indépendants communs aux éléments H de \mathfrak{h} . On les note encore u, d, s , noms donnés aux *quarks*,

$$u = \text{up}, \quad d = \text{down}, \quad s = \text{strange} .$$

Dans la base (I_3, T_8) , les poids, $\lambda_1 = w_u, \lambda_2 = w_d, \lambda_3 = w_s$, de la représentation standard forment un triangle équilatéral. On a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 .$$

Nous dessinons ci-dessous le diagramme des poids de la représentation standard de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, que nous désignerons dans la suite par **3**.

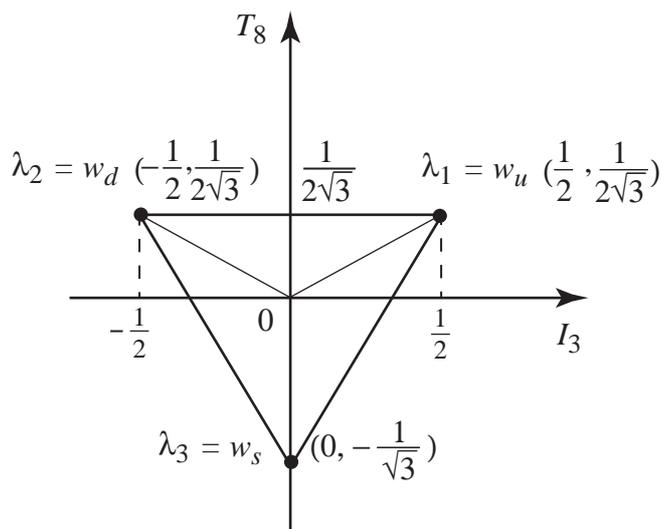


Figure 2. La représentation **3**.

3.2 Contragrédiente de la représentation standard

On passe de la représentation standard à sa contragrédiente en remplaçant les matrices $X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ par $X' = -{}^t X$, donc $H'_j e_i = -\lambda_i(H_j) e_i$. Les relations

$$\begin{aligned} H'_1 e_1 &= -e_1, & H'_2 e_1 &= 0, \\ H'_1 e_2 &= e_2, & H'_2 e_2 &= -e_2, \\ H'_1 e_3 &= 0, & H'_2 e_3 &= e_3, \end{aligned}$$

montrent que les composantes des trois poids dans la base (H_1, H_2) sont

$$\lambda'_1 = (-1, 0), \quad \lambda'_2 = (1, -1), \quad \lambda'_3 = (0, 1) .$$

On obtient donc le tableau suivant pour les poids de la représentation contragrédiente de la représentation standard.

racine	relations	base(I_3, Y)	base(I_3, T_8)	
λ'_1	$I_3 e_1 = -\frac{1}{2}e_1 \quad Y e_1 = -\frac{1}{3}e_1$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$	\bar{u}
λ'_2	$I_3 e_2 = \frac{1}{2}e_2 \quad Y e_2 = -\frac{1}{3}e_2$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$	\bar{d}
λ'_3	$I_3 e_3 = 0 \quad Y e_3 = \frac{2}{3}e_3$	$(0, \frac{2}{3})$	$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$	\bar{s}

Les vecteurs poids \bar{u}, \bar{d} et \bar{s} sont appelés les *antiquarks*.

Nous dessinons ci-dessous le diagramme des poids de la représentation contragrédiente de la représentation standard de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, que nous désignerons dans la suite par $\bar{\mathfrak{3}}$.

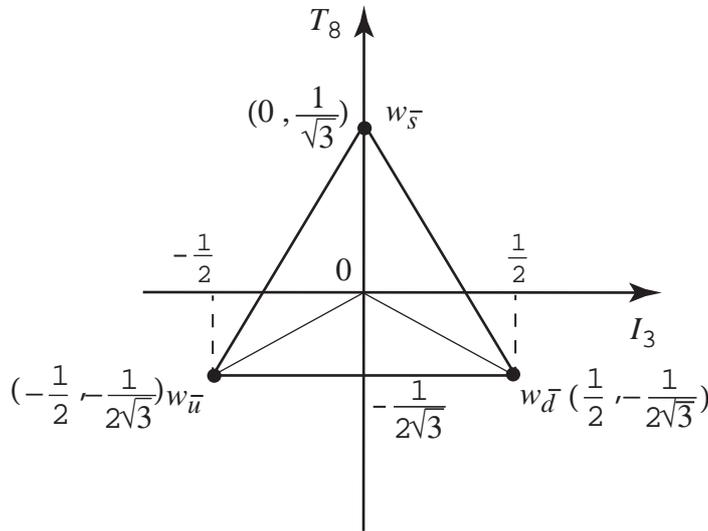


Figure 3. La représentation $\bar{\mathfrak{3}}$.

4 Poids maximal d'une représentation de dimension finie

4.1 Poids maximal

On va voir que dans chacune des trois représentations décrites ci-dessus, l'un des poids joue un rôle particulier. Il sera appelé le *poids maximal* de la représentation. Le vecteur propre correspondant au poids maximal, qui est défini à la multiplication par un scalaire non nul près, est appelé *vecteur poids maximal*.

Exemple 1. Dans $\mathfrak{3}$, le poids maximal est $\lambda_1 = w_u$, avec vecteur poids maximal $e_1 = u$. On vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $H_1 e_1 = e_1, H_2 e_1 = 0$ (e_1 est un vecteur propre de tout $H \in \mathfrak{h}$),
- (ii) $E_i e_1 = 0, \quad i = 1, 2, 3$.

De plus, on obtient e_2 et e_3 par action de F_1, F_2 et F_3 sur e_1 . Plus précisément,

$$F_1 e_1 = e_2, \quad F_2 e_1 = 0, \quad F_3 e_1 = e_3.$$

Exemple 2. Dans $\bar{\mathbf{3}}$, le poids maximal est $\lambda'_3 = w_{\bar{3}}$, avec vecteur poids maximal $e_3 = \bar{3}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (i) \quad & H'_1 e_3 = 0, \quad H'_2 e_3 = e_3 \quad (e_3 \text{ est un vecteur propre de tout } H \in \mathfrak{h}), \\ (ii) \quad & E'_i e_3 = -F_i e_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Comme dans l'exemple précédent, on obtient des multiples scalaires de e_1 et e_2 par action de F'_1, F'_2 et F'_3 sur e_3 . Plus précisément,

$$F'_1 e_3 = -E_1 e_3 = 0, \quad F'_2 e_3 = -E_2 e_3 = -e_2, \quad F'_3 e_3 = -E_3 e_3 = -e_1,$$

Exemple 3. Dans $\mathbf{8}$, le poids maximal est α_3 , avec vecteur poids maximal E_3 . On a

$$\begin{aligned} (i) \quad & [H_1, E_3] = E_3, \quad [H_2, E_3] = E_3 \quad (E_3 \text{ est un vecteur propre de tout } H \in \mathfrak{h}), \\ (ii) \quad & [E_i, E_3] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Ici, on obtient des multiples scalaires de $E_1, E_2, F_1, F_2, F_3, H_1, H_2$ par action de F_1, F_2 et F_3 sur E_3 . Plus précisément,

$$\begin{aligned} [F_1, E_3] &= E_2, \quad [F_2, E_3] = -E_1, \quad [F_3, E_3] = -H_3, \\ [F_2, [F_1, E_3]] &= -H_2, \quad [F_3, [F_1, E_3]] = -F_1, \\ [F_1, [F_2, E_3]] &= -H_1, \quad [F_3, [F_2, E_3]] = F_2, \\ [F_3, [F_3, E_3]] &= -2F_3. \end{aligned}$$

En résumé, nous avons vu que pour les représentations, ρ , étudiées jusqu'ici, il existe un *poids maximal*, w_{max} , et un vecteur, e_{max} , appelé *vecteur poids maximal*, défini à la multiplication par un scalaire non nul près, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour $i = 1, 2, 3$, le vecteur e_{max} est un vecteur propre de $\rho(H_i)$ pour la valeur propre $w_{max}(H_i)$,

(ii) pour $i = 1, 2, 3$,

$$\rho(E_i)(e_{max}) = 0,$$

(iii) les images du vecteur e_{max} par application répétée des opérateurs $\rho(F_i)$, $i = 1, 2, 3$, engendrent l'espace de la représentation tout entier.

4.2 Les poids comme combinaisons linéaires des λ_i

On a posé

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1(H) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(H) \end{pmatrix},$$

et défini ainsi des formes linéaires λ_1, λ_2 et λ_3 sur \mathfrak{h} . On va voir que chaque poids des représentations ci-dessus s'écrit

$$w = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3$$

(ce qui signifie que $w(H) = m_1\lambda_1(H) + m_2\lambda_2(H) + m_3\lambda_3(H)$, pour tout $H \in \mathfrak{h}$), où les m_i sont des entiers. On peut désigner un poids par un triplet, (m_1, m_2, m_3) . Un tel triplet n'est pas unique. En effet, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, et par conséquent l'on peut toujours se ramener au cas où l'un des m_i est nul. Par exemple, on peut écrire

$$w = (m_1 - m_3)\lambda_1 + (m_2 - m_3)\lambda_2 + m_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = m'_1\lambda_1 + m'_2\lambda_2 .$$

On peut aussi se ramener au cas où les m_i sont tous trois positifs ou nuls; c'est ce que nous montrerons dans les exemples qui suivent :

Exemple 1. La représentation $\mathbf{3}$. Dans $\mathbf{3}$, les poids sont

$$w_u = \lambda_1 , w_d = \lambda_2 , w_s = \lambda_3 .$$

On voit que

$$\begin{aligned} w_u = \lambda_1 &= \lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 &\rightarrow (1, 0, 0) , \\ w_d = \lambda_2 &= 0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 0\lambda_3 &\rightarrow (0, 1, 0) , \\ w_s = \lambda_3 &= 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 &\rightarrow (0, 0, 1) . \end{aligned}$$

Exemple 2. La représentation $\overline{\mathbf{3}}$. Dans $\overline{\mathbf{3}}$, les poids sont

$$w_{\overline{u}} = -\lambda_1 , w_{\overline{d}} = -\lambda_2 , w_{\overline{s}} = -\lambda_3 .$$

On a donc

$$\begin{aligned} w_{\overline{u}} = -\lambda_1 &= \lambda_2 + \lambda_3 &\rightarrow (0, 1, 1) , \\ w_{\overline{d}} = -\lambda_2 &= \lambda_1 + \lambda_3 &\rightarrow (1, 0, 1) , \\ w_{\overline{s}} = -\lambda_3 &= \lambda_1 + \lambda_2 &\rightarrow (1, 1, 0) . \end{aligned}$$

Exemple 3. La représentation $\mathbf{8}$. Dans la représentation $\mathbf{8}$, les poids sont les racines $\alpha_i, -\alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. On voit que

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2 &\rightarrow (2, 0, 1) , & \alpha'_1 = \lambda_2 - \lambda_1 &\rightarrow (0, 2, 1) , \\ \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3 &\rightarrow (1, 2, 0) , & \alpha'_2 = \lambda_3 - \lambda_2 &\rightarrow (1, 0, 2) , \\ \alpha_3 = \lambda_1 - \lambda_3 &\rightarrow (2, 1, 0) , & \alpha'_3 = \lambda_3 - \lambda_1 &\rightarrow (0, 1, 2) . \end{aligned}$$

Dans ces trois exemples, on reconnaît que le poids maximal est celui pour lequel le triplet (m_1, m_2, m_3) est le plus grand dans l'ordre lexicographique.

4.3 Représentations de dimension finie, poids

On démontre que, pour toute représentation irréductible, ρ , de dimension finie de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, il existe un poids maximal, w , et un vecteur poids maximal, v , défini à un scalaire multiplicatif non nul près, qui satisfont

$$\rho(H)v = w(H)v , \rho(E_i)v = 0 , i = 1, 2, 3 .$$

De plus, l'action sur v des produits des puissances des F_i , $i = 1, 2, 3$, engendrent tout l'espace de la représentation irréductible considérée de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Du calcul

$$\rho(H)\rho(F_i)v = w(H)\rho(F_i)v - \alpha_i(H)\rho(F_i)v = (w - \alpha_i)(H)\rho(F_i)v ,$$

il suit que chaque vecteur $\rho(F_1)^{k_1}\rho(F_2)^{k_2}\rho(F_3)^{k_3}v$ est un vecteur poids correspondant au poids $w - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3$. Les poids obtenus sont une partie du translaté passant par w du réseau des racines. On démontre alors la règle pratique suivante (voir [Fulton-Harris, page 184]) :

Règle : Sur le graphique, les poids d'une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ sont situés sur des hexagones concentriques qui peuvent dégénérer en des triangles. La multiplicité de chaque poids est 1 sur le bord, elle augmente de 1 à chaque passage à un hexagone concentrique en s'approchant du centre, et elle reste stationnaire sur les triangles.

4.4 Autre exemple : la représentation **6**

On considère la représentation de poids maximal $w = 2\lambda_1$. Les autres poids s'en déduisent par addition des multiples entiers négatifs de $\lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_2 - \lambda_3$ et $\lambda_1 - \lambda_3$ qui sont tels que le poids obtenu ne soit pas supérieur au poids maximal. Soit v un vecteur poids maximal. Par définition,

$$H_1v = 2v , H_2v = 0 , E_1v = E_2v = E_3v = 0 .$$

Sachant que

$$Hv = w(H)v ,$$

on obtient

$$H(F_iv) = F_i(Hv) + [H, F_i](v) = w(H)(F_iv) - \alpha_i(H)(F_iv) ,$$

d'où

$$\begin{aligned} H(F_1v) &= (w - (\lambda_1 - \lambda_2))(H)(F_1v) = (\lambda_1 + \lambda_2)(H)F_1(v) , \\ H(F_3v) &= (w - (\lambda_1 - \lambda_3))(H)(F_3v) = (\lambda_1 + \lambda_3)(H)F_3(v) . \end{aligned}$$

Par action répétée de F_1, F_2, F_3 , on obtient le diagramme suivant. Cette représentation est de dimension 6 et nous la noterons **6**.

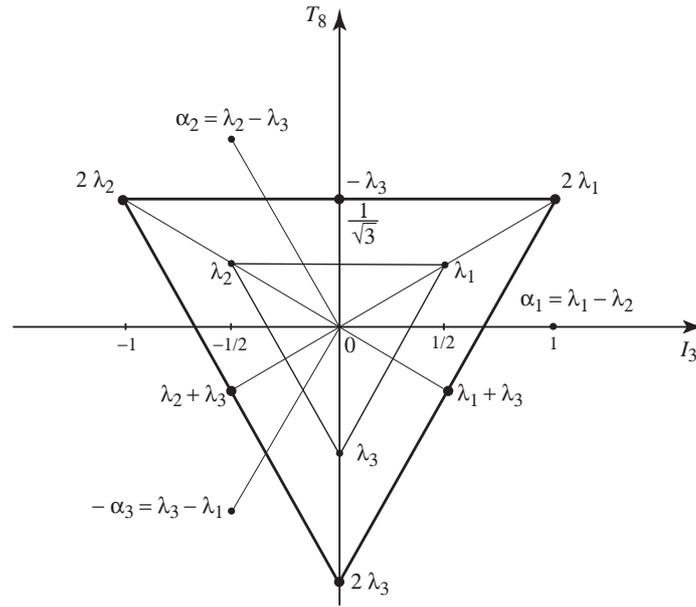


Figure 4. La représentation 6.

4.5 Encore un exemple : la représentation 10

Considérons la représentation de poids maximal $w = 3\lambda_1$. Ci-dessous est la liste des poids de cette représentation. À cause des applications à la physique des particules, dont nous dirons quelques mots au paragraphe 6, nous avons donné les noms des particules élémentaires associées à chaque poids, ainsi que la valeur de la composante de chaque poids sur l'élément $Q = \frac{1}{2}Y + I_3$ qui correspond à la charge de chaque particule.

poids w	$w(I_3)$	$w(Y)$	$w(T_8)$	$w(Q)$	
$3\lambda_1$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	Δ^{++}
$2\lambda_1 + \lambda_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	Δ^+
$\lambda_2 - \lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	Δ^0
$3\lambda_2$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	Δ^-
$\lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_2 + \lambda_3$	-1	0	0	-1	Σ^{*-}
$\lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_2 + 2\lambda_3$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	Ξ^{*-}
$3\lambda_3 = 2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2$	0	-2	$-\sqrt{3}$	-1	Ω^-
$\lambda_3 - \lambda_2 = 2\lambda_3 + \lambda_1$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	Ξ^{*0}
$\lambda_3 + 2\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2$	1	0	0	1	Σ^{*+}
0	0	0	0	0	Σ^{*0}

Nous dessinons ci-dessous le diagramme des poids de cette représentation, qui est de dimension 10, et que nous noterons par le symbole 10. À chaque poids correspond un unique vecteur poids à un scalaire multiplicatif près. Cette représentation est irréductible car on montre, en examinant le diagramme des poids, qu'elle n'est pas la somme directe de représentations de dimension inférieure. En effet, nous avons déjà la liste complète de ces représentations irréductibles de petite dimension qui sont :

- la représentation triviale, notée $\mathbf{1}$,
- la représentation standard, $\mathbf{3}$,
- la contragrédiente, $\bar{\mathbf{3}}$, de la représentation standard, $\mathbf{3}$,
- la représentation $\mathbf{6}$,
- la représentation adjointe, $\mathbf{8}$.

Voir au paragraphe 6 d'autres figurations de ce même diagramme, avec les notations utilisées en physique.

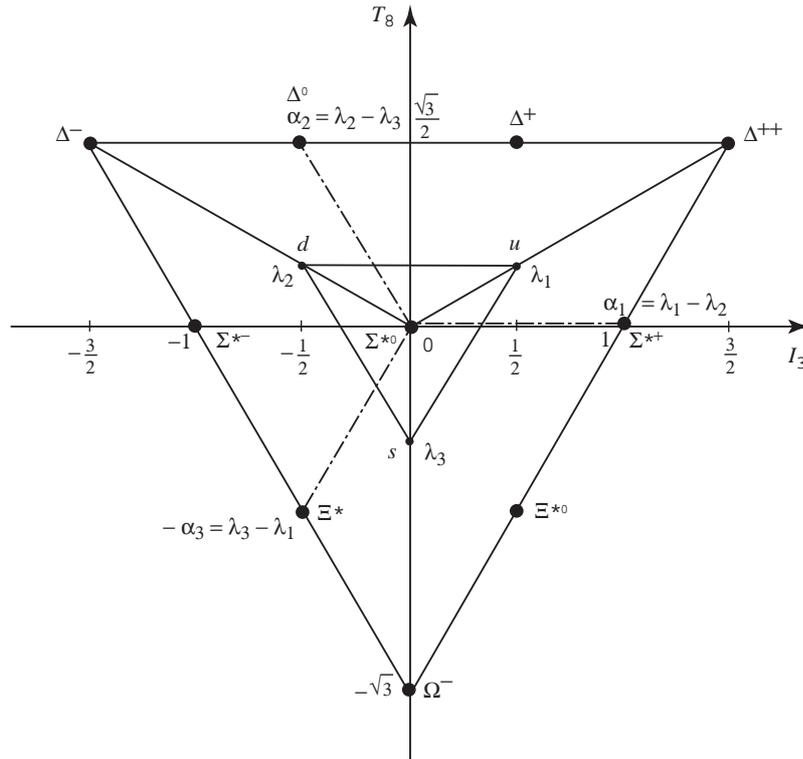


Figure 5. La représentation $\mathbf{10}$.

5 Produits tensoriels de représentations

Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations d'un même groupe G . Rappelons que, par définition, $\rho_1 \otimes \rho_2$ est la représentation de G dans $E_1 \otimes E_2$ définie par

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2 ,$$

pour $g \in G$ et $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$. Alors les différentielles de ces représentations satisfont la relation

$$D(\rho_1 \otimes \rho_2)(X)(v_1 \otimes v_2) = (D\rho_1)(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes (D\rho_2)(X)v_2 ,$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Cette relation se démontre en prenant la dérivée en $t = 0$ de la relation précédente dans laquelle $g = \exp(tX)$ (voir Chapitre 4, Exercice 11). Par abus de langage, on note

$$D(\rho_1 \otimes \rho_2) = D\rho_1 \otimes D\rho_2 .$$

Le résultat suivant est presque évident compte tenu de la formule ci-dessus, mais il est très important, et en fait valable de manière générale.

Proposition 5.1 *Si v_1 est un vecteur poids d'une représentation R_1 de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ pour un poids w_1 , et si v_2 est un vecteur poids d'une représentation R_2 de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ pour un poids w_2 , alors $v_1 \otimes v_2$ est un vecteur poids de la représentation $R_1 \otimes R_2$ pour le poids $w_1 + w_2$.*

Exemple 1 : $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$. Nous traitons graphiquement l'exemple de la représentation $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$, où l'on voit que

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} .$$

Le poids 0 est de multiplicité 3, les autres poids sont de multiplicité 1.

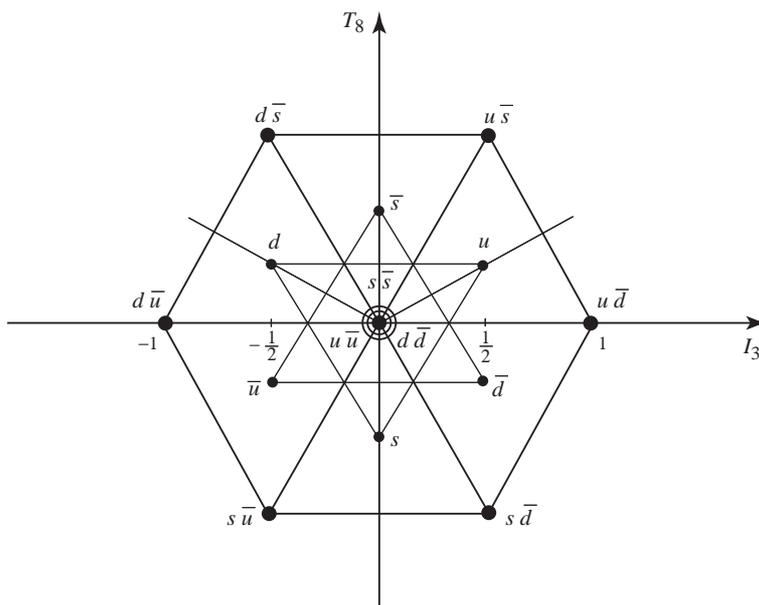


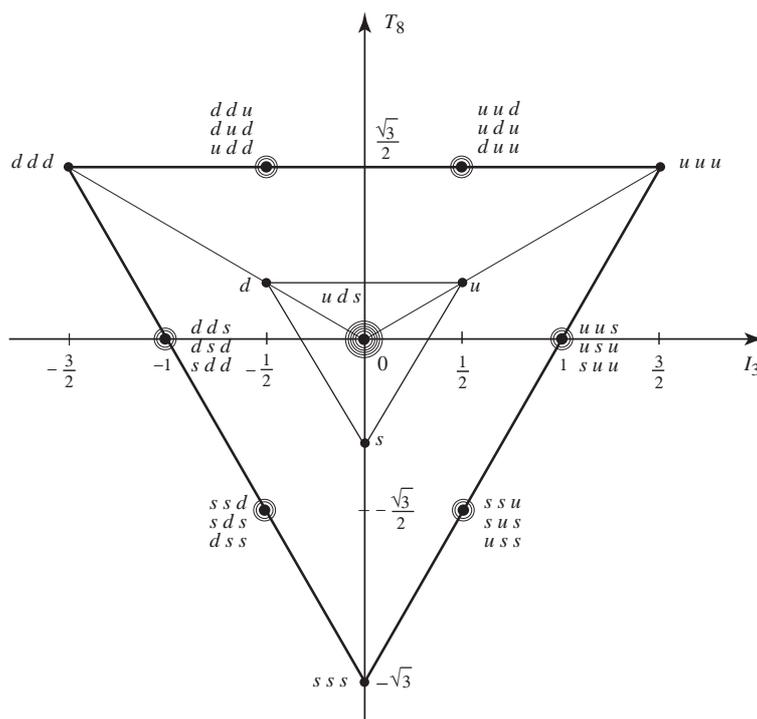
Figure 6. $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$.

Exemple 2 : $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$. Dans ce produit tensoriel, il y a trois poids de multiplicité 1, six poids de multiplicité 3, et le poids 0 est de multiplicité 6. On voit que

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} .$$

La table et le diagramme ci-dessous donnent les composantes des poids avec les vecteurs poids correspondants.

						I_3	Y
uuu						$3/2$	1
ddd						$-3/2$	1
sss						0	-2
uud	udu	duu				$1/2$	1
uus	usu	suu				1	0
ddu	dud	udd				$-1/2$	1
dds	dsd	sdd				-1	0
ssu	sus	uss				$1/2$	-1
ssd	sds	dss				$-1/2$	-1
uds	dus	sud	usd	dsu	sdu	0	0

Figure 7. $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$.

6 “The eightfold way”

Jusqu’en 1955, on avait observé 7 baryons, un huitième fut observé en 1958, le Ξ^0 . D’autre part on connaissait 7 mésons. Cet ensemble d’observations conduisit Murray Gell-Mann et Yuval Ne’eman, indépendamment, à proposer vers 1960 le groupe de symétrie $SU(3)$ pour la classification des particules élémentaires. Les baryons se groupaient dans l’octet de la représentation adjointe, et les 7 mésons connus en formaient une partie. La publication de ces résultats eut lieu en 1961. La particule η complétant l’octet des mésons et dont l’existence était donc prédite par cette théorie fut découverte en 1962 (voir [Rougé, p. 362-366] et aussi [Sternberg, p. 280-287]).

L’idée de base est que chaque particule élémentaire “est” un vecteur poids de la représentation. À chaque vecteur poids correspond un poids qui est la collection des valeurs propres des opérateurs images des vecteurs de base choisis dans la sous-algèbre de Cartan. Ici il s’agit donc de deux nombres, les valeurs propres de H_1 et de H_2 , ou de I_3 et de Y , ou de I_3 et de T_8 , suivant la base choisie. Ces deux nombres sont les *nombres quantiques*, qui caractérisent la particule quand ce poids est simple :

- le nombre quantique correspondant à I_3 est la troisième composante de l’*isospin*,
- le nombre quantique correspondant à Y est l’*hypercharge*.

Alors la charge est $Q = \frac{1}{2}Y + I_3$, et de plus, $Y = B + S$, où B est le nombre baryonique et S l’étrangeté (qui est nulle pour le proton et le neutron et pour les trois mésons π).

On obtenait l’*octet des baryons* et celui des *mésons* comme la représentation $\mathbf{8}$ de $SU(3)$, d’où le nom de “eightfold way” (en français, “voie octuple”) donné à la théorie.

D’autres particules élémentaires à durée de vie ultra-courte appelées “résonances”

furent observées en 1961, les quatre Δ et les trois Σ^* , formant 7 des 10 points du diagramme des poids de la représentation **10** de SU(3). La théorie prédisait l’existence de deux particules d’hypercharge -1 , les Ξ^* , découverts en 1962, ainsi que celle d’une particule correspondant au dixième point, qui fut nommée Ω^- , et qui fut découverte plus tard en 1964, ce qui constitua un grand succès pour la théorie SU(3).

On reproduit ci-dessous des tables de baryons et de mésons (voir K. Hagiwara *et al.*, The Review of Particle Physics, *Phys. Rev. D*66 010001 (2002), <http://pdg.lbl.gov>), avec les diagrammes correspondants, et le diagramme des résonances baryoniques, inspirés de [Sternberg, pages 286 et 287], ainsi que les mêmes diagrammes adaptés du livre de [Blaizot-Tolédano, pages 143-145]. On reconnaît immédiatement le diagramme des poids de la représentation **8** pour les baryons et les mésons, et celui de la représentation **10** pour les résonances baryoniques. Dans ces tables, J désigne le spin et I l’isospin de la particule.

6.1 Baryons ($B = 1$)

	S	I	I_3	Q	J	Masse (MeV/c ²)	Vie moyenne (s)
Ξ^-	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1321	$1,6 \times 10^{-10}$
Ξ^0	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1315	$2,9 \times 10^{-10}$
Σ^-	-1	1	-1	-1	$\frac{1}{2}$	1197	$1,5 \times 10^{-10}$
Σ^0	-1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1193	$7,4 \times 10^{-20}$
Σ^+	-1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1189	$0,8 \times 10^{-10}$
Λ^0	-1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1116	$2,6 \times 10^{-10}$
n	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	940	$0,9 \times 10^3$
p	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	938	<i>stable</i>

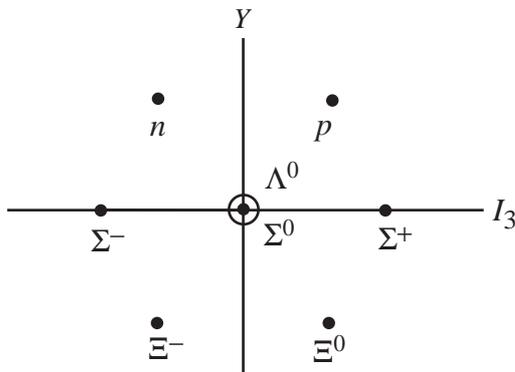


Figure 8a

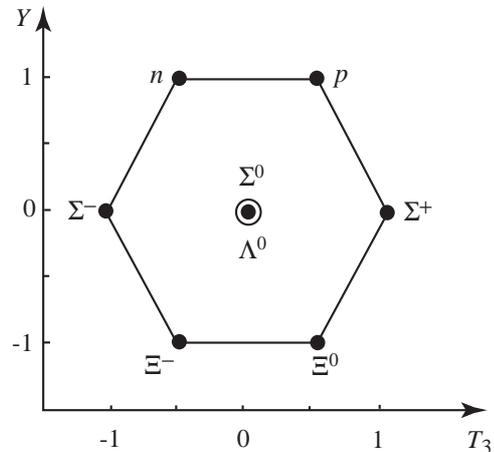


Figure 8b

6.2 Mésons ($B = 0$)

	S	I	I_3	Q	J	Masse (MeV/c ²)	Vie moyenne (s)
K^+	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	494	$1,2 \times 10^{-8}$
K^0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	498	$K_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0)$ $0,9 \times 10^{-10}$
\bar{K}^0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	498	$K_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0)$ $5,2 \times 10^{-8}$
K^-	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	494	$1,2 \times 10^{-8}$
π^+	0	1	1	1	0	140	$2,6 \times 10^{-8}$
π^0	0	1	0	0	0	135	$8,4 \times 10^{-17}$
π^-	0	1	-1	-1	0	140	$2,6 \times 10^{-8}$

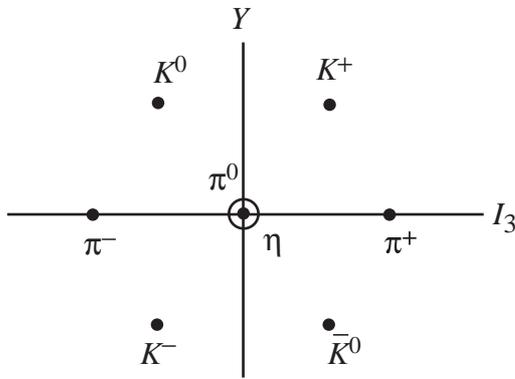


Figure 9a

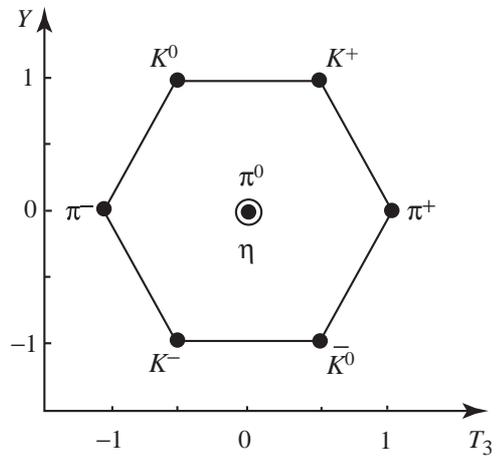


Figure 9b

6.3 Résonances baryoniques

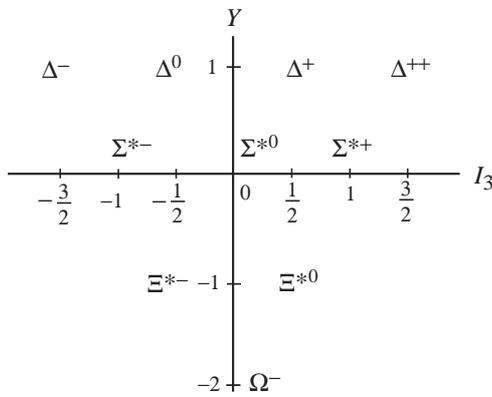


Figure 10a

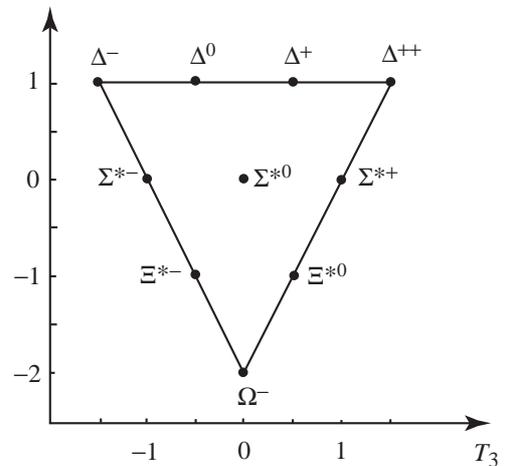


Figure 10b

7 Les quarks et les antiquarks

Les représentations $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$ cependant ne correspondaient à aucune particule observée. Le modèle des quarks permet de considérer tous les hadrons (baryons et mésons) “comme des états composés de quarks et d’antiquarks”. Mathématiquement, cela signifie que

- Les *quarks* sont les particules correspondant à la représentation $\mathbf{3}$ de $SU(3)$: les trois quarks, u (“up”), d (“down”) et s (“strange”), sont les vecteurs poids de cette représentation.

$\mathbf{3}$	w	$w(I_3)$	$w(Y)$	$w(T_8)$	$w(Q)$
u	$w_u = \lambda_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}$
d	$w_d = \lambda_2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3}$
s	$w_s = \lambda_3$ $= -\lambda_1 - \lambda_2$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{3}$

- Les *antiquarks* sont les particules correspondant à la représentation $\bar{\mathbf{3}}$ de $SU(3)$: les trois antiquarks, \bar{u} , \bar{d} , et \bar{s} , sont les vecteurs poids de cette représentation.

$\bar{\mathbf{3}}$	w	$w(I_3)$	$w(Y)$	$w(T_8)$	$w(Q)$
\bar{u}	$w_{\bar{u}} = \lambda_2 + \lambda_3$ $= -\lambda_1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3}$
\bar{d}	$w_{\bar{d}} = \lambda_1 + \lambda_3$ $= -\lambda_2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$
\bar{s}	$w_{\bar{s}} = \lambda_1 + \lambda_2$ $= -\lambda_3$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$

- On obtient l’octet des mésons dans la décomposition du produit tensoriel $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$, plus précisément,

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} ,$$

“un méson est constitué d’une paire quark-antiquark”.

- On obtient l’octet et le décuplet des baryons dans la décomposition du produit tensoriel

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} ,$$

“un baryon est composé de trois quarks”.

Les décompositions ci-dessus sont celles que nous avons montrées graphiquement plus haut.

Pour éviter les difficultés dues aux charges fractionnaires et à une incompatibilité avec le principe d’exclusion de Pauli, on introduit en fait une symétrie $SU(3)$ supplémentaire, la “couleur”, c’est la “chromodynamique quantique”.

8 Références pour le chapitre 7

[Blaizot-Tolédano], [Fulton-Harris], [Ludwig-Falter], [Rougé], [Sattinger-Weaver], [Sternberg].

9 Exercices pour le chapitre 7

Exercice 1. *La représentation $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$.*

Décomposer en somme directe de représentations irréductibles la représentation $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ de $SU(2)$ à l'aide du diagramme des poids.

Exercice 2. *La représentation $\mathbf{10}$.*

Démontrer que la représentation $\mathbf{10}$ de $SU(2)$ est irréductible.

Chapitre 8

Problèmes corrigés

1 Représentations du groupe symétrique \mathfrak{S}_3

Soit ρ la représentation irréductible de dimension 2 du groupe symétrique \mathfrak{S}_3 . On pose $\rho = \rho^{\otimes 1}$ et l'on définit par récurrence, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\rho^{\otimes k} = \rho^{\otimes(k-1)} \otimes \rho .$$

Ainsi, $\rho^{\otimes 2} = \rho \otimes \rho$, $\rho^{\otimes 3} = \rho \otimes \rho \otimes \rho$, ... , $\rho^{\otimes k} = \rho \otimes \rho \otimes \dots \otimes \rho$, k fois.

1. Décomposer $\rho^{\otimes k}$ en somme directe de représentations irréductibles, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{S}_3$ le groupe alterné. Décomposer en somme directe de représentations irréductibles les restrictions à \mathfrak{A}_3 de ρ , $\rho \otimes \rho$ et $\rho \otimes \rho \otimes \rho$.

Corrigé

1. On sait que $\chi_{\rho^{\otimes k}} = (\chi_\rho)^k$. D'où la table de caractères

\mathfrak{S}_3	$\begin{smallmatrix} 1 \\ e \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 3 \\ t \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ c \end{smallmatrix}$
$\underline{1}$	1	1	1
sg	1	-1	1
ρ	2	0	-1
$\rho^{\otimes k}$	2^k	0	$(-1)^k$

On a $\rho^{\otimes k} = m_{\underline{1}} \underline{1} \oplus m_{sg} sg \oplus m_\rho \rho$, où, en posant $\chi_{\rho^{\otimes k}} = \chi_k$,

$$\begin{aligned} m_{\underline{1}} &= \frac{1}{6} \sum_{g \in \sigma_3} \chi_k(g) = \frac{1}{6} (2^k + 2(-1)^k) = \frac{1}{3} (2^{k-1} + (-1)^k) , \\ m_{sg} &= m_{\underline{1}}, \text{ car } \chi_k(t) = 0 , \\ m_\rho &= \frac{1}{6} (2 \cdot 2^k - 2(-1)^k) = \frac{1}{3} (2^k + (-1)^{k-1}) . \end{aligned}$$

D'où

$$\rho^{\otimes k} = \frac{1}{3} (2^{k-1} + (-1)^k) (\underline{1} \oplus sg) + \frac{1}{3} (2^k + (-1)^{k-1}) \rho .$$

On vérifie que ces coefficients sont évidemment des entiers.

2. En particulier

$$\rho \otimes \rho = \underline{1} \oplus sg \oplus \rho, \quad (1)$$

$$\rho \otimes \rho \otimes \rho = \underline{1} \oplus sg \oplus 3\rho. \quad (2)$$

On a la table de caractères

\mathfrak{A}_3	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c^2}$
$\underline{1}_{\mathfrak{A}_3}$	1	1	1
σ	1	j	j^2
$\bar{\sigma}$	1	j^2	j
$\rho _{\mathfrak{A}_3}$	2	-1	-1

On a donc $\rho|_{\mathfrak{A}_3} = \sigma \oplus \bar{\sigma}$. On sait que $sg|_{\mathfrak{A}_3} = \underline{1}_{\mathfrak{A}_3}$, d'où

$$\rho^{\otimes 2}|_{\mathfrak{A}_3} = 2 \cdot \underline{1}_{\mathfrak{A}_3} \oplus \sigma \oplus \bar{\sigma}, \quad \text{d'après (1),}$$

et

$$\rho^{\otimes 3}|_{\mathfrak{A}_3} = 2 \cdot \underline{1}_{\mathfrak{A}_3} \oplus 3\sigma \oplus 3\bar{\sigma}, \quad \text{d'après (2).}$$

2 Le groupe $O(2)$

Soit $O(2)$ le groupe des rotations et symétries du plan conservant l'origine, engendré par les matrices

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \text{et } s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les classes de conjugaison de $O(2)$.

2. a) Montrer que toute représentation irréductible de $O(2)$ est de dimension ≤ 2 . (On pourra considérer la restriction de la représentation au sous-groupe $SO(2)$.)

b) Déterminer les représentations de dimension 1 de $O(2)$.

c) Montrer que les représentations irréductibles de dimension 2 de $O(2)$, à équivalence près, sont telles que

$$\pi_n(r_\theta) = \begin{pmatrix} e^{in\theta} & 0 \\ 0 & e^{-in\theta} \end{pmatrix},$$

pour un entier $n \geq 1$. Déterminer le caractère χ_{π_n} de π_n .

3. Soit Ad la représentation adjointe de $O(2)$ dans son algèbre de Lie. Montrer qu'elle est équivalente à l'une des représentations étudiées à la question 2.

4. Décomposer $\pi_n \otimes \pi_m$, pour $n \geq 1$ et $m \geq 1$, en somme directe de représentations irréductibles.

5. a) Montrer que $r_{\frac{2\pi}{3}}$ et s engendrent un sous-groupe de $O(2)$ isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_3 sur trois éléments.

b) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la décomposition de la restriction σ_n de π_n à ce sous-groupe en somme directe de représentations irréductibles. Donner une interprétation géométrique du résultat.

Corrigé

1. Les relations $s^2 = I$ et $sr_\theta s^{-1} = r_{-\theta}$ entraînent $r_\theta s = sr_{-\theta}$, d'où $r_\theta sr_{-\theta} = sr_{-2\theta}$. Donc la classe de conjugaison de s est $\{sr_\theta | \theta \in [0, 2\pi[\}$. D'autre part r_θ et $r_{\theta'}$ sont conjugués si et seulement si $\theta' = -\theta$. Donc les autres classes de conjugaison de $O(2)$ sont $\{I\}$, $\{-I\}$ et $\{r_\theta, r_{-\theta}\}$, pour $0 < \theta < \pi$.

2. a) Soit ρ une représentation irréductible de $O(2)$ dans \mathbb{C}^d . Comme $SO(2)$ est abélien, la restriction de ρ à $SO(2)$ est somme directe de représentations de dimension 1, donc laisse toutes les droites de \mathbb{C}^d invariantes. Soit $x \in \mathbb{C}^d$. L'espace vectoriel engendré par x et sx est invariant par $O(2)$. Comme la représentation est supposée irréductible, c'est l'espace entier, donc $d \leq 2$. La représentation est de dimension 1 si et seulement si x et sx sont colinéaires.

b) Soit $\rho : O(2) \rightarrow \mathbb{C}$ une représentation de dimension 1 de $O(2)$. On doit avoir $\rho(s) = 1$ ou $\rho(s) = -1$. Comme $\rho(sr_\theta) = \rho(s)$, on a nécessairement $\rho(r_\theta) = 1$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$. Donc, ou bien $\rho = \chi_1$ la *représentation triviale* ou bien $\rho = \chi'_1$, la *représentation déterminant*.

c) Soit $\rho : O(2) \rightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ une représentation de dimension 2 de $O(2)$. Il existe $x \in \mathbb{C}^2$ tel que x et sx sont linéairement indépendants (sinon la représentation est de dimension 1). Dans la base (x, sx) de \mathbb{C}^2 , la matrice de $\rho(s)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque la restriction de ρ à $SO(2)$ est somme directe de représentations de dimension 1, il existe des entiers n et m tels que la matrice de $\rho(r_\theta)$ dans la base (x, sx) de \mathbb{C}^2 soit $\begin{pmatrix} e^{in\theta} & 0 \\ 0 & e^{im\theta} \end{pmatrix}$. La relation $r_\theta s = sr_{-\theta}$ entraîne $m = -n$. On vérifie que pour tout entier $n \geq 0$, $\pi_n(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\pi_n(r_\theta) = \begin{pmatrix} e^{in\theta} & 0 \\ 0 & e^{-in\theta} \end{pmatrix}$ définit une représentation de dimension 2 de $O(2)$.

Les seuls vecteurs de \mathbb{C}^2 invariants par $\pi_n(s)$ sont colinéaires à $e_1 + e_2$. Ceux-ci sont invariants par $\pi_n(r_\theta)$ pour tout θ si et seulement si $n = 0$. On a $\pi_0 = \chi_1 \oplus \chi'_1$. Pour $n \geq 1$, π_n est irréductible. Le caractère χ_{π_n} de π_n est tel que

$$\chi_{\pi_n}(r_\theta) = 2 \cos n\theta, \quad \chi_{\pi_n}(s) = 0.$$

3. L'algèbre de Lie de $O(2)$ est $\mathfrak{o}(2) = \mathfrak{so}(2)$, algèbre de Lie abélienne réelle de dimension 1. On peut choisir la base $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{o}(2)$ pour identifier $\mathfrak{o}(2)$ à \mathbb{R} . Donc $\text{Ad} : O(2) \rightarrow GL(\mathfrak{o}(2))$ est une représentation de $O(2)$ de dimension 1. Elle est nécessairement équivalente à χ_1 ou χ'_1 . On a $\text{Ad}_s : X \in \mathfrak{o}(2) \mapsto sXs^{-1} \in \mathfrak{o}(2)$ et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\text{Ad}_s = -1$. D'où $\text{Ad} \approx \chi'_1$.

4. Soient $n \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers. On a

$$\chi_{\pi_n \otimes \pi_m} = \chi_{\pi_n} \chi_{\pi_m}.$$

Ce caractère est nul sur s et tel que

$$(\chi_{\pi_n} \chi_{\pi_m})(r_\theta) = 4 \cos n\theta \cos m\theta = 2(\cos(n+m)\theta + \cos(|n-m|\theta)) .$$

Si $n \neq m$, on trouve donc

$$\chi_{\pi_n} \otimes \pi_m = \chi_{\pi_{n+m}} + \chi_{\pi_{|n-m|}},$$

d'où

$$\pi_n \otimes \pi_m = \pi_{n+m} \oplus \pi_{|n-m|}.$$

Si $n = m$, $(\chi_{\pi_n} \chi_{\pi_n})(r_\theta) = \chi_{\pi_{2n}} + 2$. La représentation π_0 de dimension 2 dont le caractère vaut 2 sur r_θ et 0 sur s est réductible, $\pi_0 = \chi_1 \oplus \chi'_1$. On a donc

$$\pi_n \otimes \pi_n = \pi_{2n} \oplus \chi_1 \oplus \chi'_1 .$$

5. a) Posons $c = r_{\frac{2\pi}{3}}$. On vérifie que c et s satisfont les relations $c^3 = I$, $s^2 = I$ et $c^2 s = sc$. Le sous-groupe G de $O(2)$ engendré par c et s est le groupe à six éléments,

$$\{e, c, c^2, s, sc, sc^2\},$$

isomorphe à \mathfrak{S}_3 .

b) La représentation $\sigma_n = \pi_{n|_G}$ se décompose en somme directe de représentations de $G \approx \mathfrak{S}_3$. On a

$$\chi_{\sigma_n}(c) = 2 \cos \frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ -1 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

D'autre part, la restriction de χ_1 à \mathfrak{S}_3 est la représentation triviale, tandis que la restriction de χ'_1 est la représentation signature. La restriction σ_1 de π_1 est la représentation irréductible de dimension 2 de \mathfrak{S}_3 . On a la table de caractères,

	e	c	s
χ_{Id}	1	1	1
χ_{sg}	1	1	-1
σ_1	2	-1	0
$n \equiv 0 \pmod{3} \sigma_n$	2	2	0
$n \not\equiv 0 \pmod{3} \sigma_n$	2	-1	0

$$\text{D'où, pour } p \in \mathbb{N}, \begin{cases} \sigma_{3p} & = Id \oplus sg, \\ \sigma_{3p+1} & = \sigma_{3p+2} = \sigma_1. \end{cases}$$

Interprétation géométrique. Si $n \equiv 0 \pmod{3}$, les rotations $c = r_{\frac{2\pi}{3}}$ et $c^2 = r_{\frac{4\pi}{3}}$ agissent par π_n comme l'identité du plan \mathbb{C}^2 . D'autre part, $\pi_n(s)$ laisse toujours invariante la droite D_1 de vecteur directeur $e_1 + e_2$ et la droite D_2 de vecteur directeur $e_1 - e_2$. Plus précisément $\pi_n(s)(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$ et $\pi_n(s)(e_1 - e_2) = -(e_1 - e_2)$. Ces deux droites étant invariantes par σ_n , on a

$$\sigma_{n|_{D_1}} = Id \text{ et } \sigma_{n|_{D_2}} = sg .$$

Si $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, $\sigma_n(c) = \pi_n(r_{\frac{2\pi}{3}})$ ne laisse aucune droite de \mathbb{C}^2 invariante. Donc σ_n est une représentation irréductible de dimension 2 de \mathfrak{S}_3 . C'est la complexifiée de la représentation de \mathfrak{S}_3 dans \mathbb{R}^2 par rotations d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ et symétries par rapport aux hauteurs d'un triangle équilatéral centré à l'origine.

3 Représentations irréductibles de $SU(2) \times SU(2)$

Soit \mathbb{H} l'algèbre associative des quaternions, espace vectoriel réel de dimension 4, de base $1, i, j, k$, avec la multiplication définie par

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Pour $q = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, on pose $\bar{q} = \alpha_0 1 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k$ et $\|q\|^2 = q\bar{q}$. On admettra que $\|q\|^2 = \sum_{p=0}^3 (\alpha_p)^2$ et que

$$\|qq'\| = \|q\| \|q'\|.$$

On désigne par \mathbb{S} le groupe des quaternions de norme 1,

$$\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}.$$

On considère l'espace vectoriel réel \mathcal{H} engendré par les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

On remarquera que $SU(2)$ et $\mathfrak{su}(2)$ sont contenus dans \mathcal{H} .

Première partie

1. On note $M \mapsto q_M$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels réels de \mathcal{H} sur \mathbb{H} défini par $I \mapsto 1, \mathcal{I} \mapsto i, \mathcal{J} \mapsto j, \mathcal{K} \mapsto k$.

a) Montrer que la restriction à $SU(2)$ de cette application est un isomorphisme du groupe $SU(2)$ sur le groupe \mathbb{S} .

b) Montrer que, pour tout $X \in \mathfrak{su}(2)$,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (q_{\exp(tX)}) = q_X.$$

2. Soit $(A, B) \in SU(2) \times SU(2)$. On considère l'application

$$\sigma(A, B) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

définie par

$$\sigma(A, B)q = q_A q (q_B)^{-1}, \quad \forall q \in \mathbb{H}.$$

On identifie \mathbb{H} à \mathbb{R}^4 par l'application \mathbb{R} -linéaire définie par $1 \mapsto e_0, i \mapsto e_1, j \mapsto e_2, k \mapsto e_3$, où (e_0, e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^4 .

a) Montrer que $\sigma(A, B)$ s'identifie à un élément de $O(4)$.

b) Montrer que σ est un morphisme de groupes de $SU(2) \times SU(2)$ dans $SO(4)$.

c) Déterminer le noyau du morphisme σ .

3. a) Déterminer la différentielle $D\sigma : \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(4)$ de σ .
- b) Montrer que $D\sigma$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.
- c) Montrer que l'image de σ est $\text{SO}(4)$.

Deuxième partie

Soient (E_1, ρ_1) et (E_2, ρ_2) des représentations de dimension finie de groupes de Lie compacts G_1 et G_2 respectivement. On définit une représentation ρ de $G_1 \times G_2$ dans $E_1 \otimes E_2$ par

$$\rho(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g_1)v_1 \otimes \rho_2(g_2)v_2 ,$$

pour $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$. On note cette représentation $\rho = \rho_1 \times \rho_2$.

On admettra que toute représentation irréductible de $G_1 \times G_2$ est de la forme $(E_1 \otimes E_2, \rho_1 \times \rho_2)$, où (E_i, ρ_i) est une représentation irréductible de $G_i, i = 1, 2$.

4. Déterminer les représentations irréductibles de $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ et celles de $\text{SO}(4)$.
5. Soit R la différentielle de $\rho = \rho_1 \times \rho_2$. Évaluer

$$R(X_1, X_2)(v_1 \otimes v_2) ,$$

pour $X_1 \in \mathfrak{g}_1, X_2 \in \mathfrak{g}_2, v_1 \in E_1, v_2 \in E_2$, à l'aide de $D\rho_1$ et $D\rho_2$. On notera $D\rho_1 \times D\rho_2$ une telle représentation de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ ou de sa complexifiée $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

6. On considère, avec la notation de la question 5, la représentation $D^{(j_1 j_2)} = D^{j_1} \times D^{j_2}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ dans $V^{j_1} \otimes V^{j_2}$. On pose

$$J_1 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Soit $|j, m\rangle$ la base usuelle de l'espace V^j . Choisir une base de $V^{j_1} \otimes V^{j_2}$ et écrire les matrices dans cette base de $D^{(j_1 j_2)}(X, 0)$ et de $D^{(j_1 j_2)}(0, X)$,

- a) pour $X = J_1, J_2, J_3$, lorsque $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$,
- b) pour $X = J_3$, lorsque $j_1 = 1$ et $j_2 = \frac{1}{2}$,
- c) pour $X = J_3$, lorsque $j_1 = \frac{1}{2}$ et $j_2 = 1$.

7. Les représentations $D^{(j_1 j_2)}$ et $D^{(j_2 j_1)}$ sont-elles équivalentes? Pourquoi?

8. Pour $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, on pose $D_1^{(j_1 j_2)}(X^2) = D^{(j_1 j_2)}(X, 0) \circ D^{(j_1 j_2)}(X, 0)$ et $D_2^{(j_1 j_2)}(X^2) = D^{(j_1 j_2)}(0, X) \circ D^{(j_1 j_2)}(0, X)$. On pose $C_i^{(j_1 j_2)} = \sum_{\ell=1}^3 D_i^{(j_1 j_2)}(J_\ell^2), i = 1, 2$. Évaluer $C_1^{(j_1 j_2)}$ et $C_2^{(j_1 j_2)}$ sur $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$.

9. On conserve les notations des questions précédentes. On cherche à évaluer la multiplicité des états liés d'énergie négative d'un atome d'hydrogène. Soient e, m et \hbar des constantes. On définit la constante de Rydberg,

$$R_H = \frac{me^4}{2\hbar^2} .$$

Soient R_ℓ et l_ℓ , $\ell = 1, 2, 3$, des éléments de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. On pose $R^2 = \sum_{\ell=1}^3 D_1^{(jj)}(R_\ell^2)$, et $l^2 = \sum_{\ell=1}^3 D_2^{(jj)}(l_\ell^2)$. On suppose que

$$R^2 = e^4 + 2E \frac{l^2 + \hbar^2}{m},$$

et que

$$-\frac{m}{2E} R^2 + l^2 = 2\hbar^2 (C_1^{(jj)} + C_2^{(jj)}).$$

En déduire la valeur de l'énergie, E , en fonction de la constante R_H et de l'entier $n = 2j+1$.

Corrigé

Première partie

1.a) L'application $M \mapsto q_M$ respecte la multiplication car

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^2 = \mathcal{J}^2 = \mathcal{K}^2 &= -I, \quad \mathcal{I}\mathcal{J} = -\mathcal{J}\mathcal{I} = \mathcal{K}, \\ \mathcal{J}\mathcal{K} = -\mathcal{K}\mathcal{J} &= \mathcal{I}, \quad \mathcal{K}\mathcal{I} = -\mathcal{I}\mathcal{K} = \mathcal{J}. \end{aligned}$$

La restriction de cette application est donc un morphisme de groupes. L'image de $SU(2)$ est \mathbb{S} car, si $A \in SU(2)$, $A = \alpha_0 I + \alpha_1 \mathcal{I} + \alpha_2 \mathcal{J} + \alpha_3 \mathcal{K}$ avec $\sum_{p=0}^3 (\alpha_p)^2 = 1$, donc $q_A \in \mathbb{S}$, et, inversement, tout quaternion de norme 1 est l'image d'une matrice A appartenant à $SU(2)$. Donc $A \in SU(2) \mapsto q_A \in \mathbb{S}$ est un isomorphisme de groupes.

1.b) L'espace vectoriel \mathcal{H} est en fait une sous-algèbre de $GL(2, \mathbb{C})$ pour la multiplication des matrices. Si $X \in \mathfrak{su}(2)$, $\frac{X^k}{k!} \in \mathcal{H}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et l'on a, dans \mathbb{H} ,

$$q_{\exp tX} = q_{I+tX+O(t^2)} = 1 + tq_X + O(t^2).$$

D'où $\frac{d}{dt}|_{t=0} q_{\exp tX} = q_X$.

On peut aussi utiliser la relation $\exp(tX) = \cos t I + \sin t X$, valable pour X de déterminant 1, d'où, pour tout $X \in \mathfrak{su}(2)$,

$$\exp(tX) = \cos(t\|X\|)I + \sin(t\|X\|) \frac{X}{\|X\|},$$

d'où $q_{\exp(tX)} = \cos(t\|X\|)1 + \frac{1}{\|X\|} \sin(t\|X\|)q_X$, et l'on a bien $\frac{d}{dt}|_{t=0} q_{\exp(tX)} = q_X$.

2.a) Dans l'identification de \mathbb{H} avec \mathbb{R}^4 , la norme des quaternions s'identifie à la norme euclidienne. L'application $\sigma(A, B)$ conserve la norme des quaternions puisque

$$\|q_A q(q_B)^{-1}\| = \|q_A\| \|q\| \|(q_B)^{-1}\|,$$

ce qui est égal à $\|q\|$, car $\|q_A\| = \|q_B\| = \|(q_B)^{-1}\| = 1$, pour $A, B \in SU(2)$. Donc σ s'identifie à un élément de $O(4)$.

2.b) Soient (A, B) et (A', B') des éléments de $SU(2) \times SU(2)$. On a

$$\sigma(A, B) \circ \sigma(A', B')q = \sigma(A, B)(q_{A'} q(q_{B'})^{-1}) = q_A q_{A'} q(q_{B'})^{-1} (q_B)^{-1}.$$

Or $A \mapsto q_A$ est un morphisme de groupes, donc

$$q_A q_{A'} = q_{AA'} \quad \text{et} \quad (q_{B'})^{-1} (q_B)^{-1} = (q_B q_{B'})^{-1} = (q_{BB'})^{-1}.$$

D'où

$$\sigma(A, B) \circ \sigma(A', B') = \sigma(AA', BB') .$$

L'image de $SU(2) \times SU(2)$ est contenue dans $SO(4)$ car $SU(2) \times SU(2)$ est connexe.

2.c) Le noyau de σ est l'ensemble des couples (A, B) tels que $\forall q \in \mathbb{H}, q_A q = q q_B$. En prenant $q = 1$, on voit que $q_A = q_B$. Posons

$$q_A = \alpha_0 1 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k .$$

La condition $q_A i = i q_A$ implique

$$\alpha_0 i - \alpha_1 - \alpha_2 k + \alpha_3 j = \alpha_0 i - \alpha_1 + \alpha_2 k - \alpha_3 j,$$

d'où

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0 .$$

La condition $q_A j = j q_B$ implique $\alpha_1 = 0$. On obtient donc $q_A = q_B = \alpha_0 1$. Comme $\|q_A\| = 1$, les solutions sont $q_A = q_B = 1$, et $q_A = q_B = -1$. Le noyau de σ est donc l'ensemble

$$\{(I, I), (-I, -I)\} \subset SU(2) \times SU(2) .$$

3.a) On a $D\sigma(X, Y)q = \frac{d}{dt}|_{t=0} \sigma(\exp(tX), \exp(tY))q$

$$= \frac{d}{dt}|_{t=0} q_{\exp(tX)} q q_{\exp(-tY)} = q_X q - q q_Y ,$$

d'après la relation $\frac{d}{dt}|_{t=0} q_{\exp(tX)} = q_X$.

3.b) On sait que $D\sigma : \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(4)$ et que $D\sigma$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Le noyau de $D\sigma$ est l'ensemble des paires $(X, Y) \in \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ telles que $q_X q = q q_Y, \forall q \in \mathbb{H}$. Ceci entraîne $q_X = q_Y = \pm 1$. Comme X et Y appartiennent à $\mathfrak{su}(2)$, q_X et q_Y sont nuls. D'où $\ker D\sigma = (0, 0)$. Comme $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(4)$ ont même dimension, 6, ce morphisme injectif est un isomorphisme.

3.c) Tout élément de $SO(4)$ s'écrit $\exp Z_1 \cdots \exp Z_k$, où $Z_\ell \in \mathfrak{so}(4)$. Comme $D\sigma$ est bijectif, $Z_\ell = D\sigma(X_\ell, Y_\ell)$ pour un couple $(X_\ell, Y_\ell) \in \mathfrak{su}(2)$. Or $\exp Z_\ell = \exp D\sigma(X_\ell, Y_\ell) = \sigma(\exp X_\ell, \exp Y_\ell)$, donc $\exp Z_\ell \in \text{Im} \sigma$. On en déduit que $\exp Z_1 \cdots \exp Z_k \in \text{Im} \sigma$, donc $\text{Im} \sigma = SO(4)$.

4. Les représentations irréductibles de $SU(2) \times SU(2)$ sont les $\mathcal{D}^{j_1} \times \mathcal{D}^{j_2}, (j_1, j_2) \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \times \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Posons

$$\mathcal{D}^{(j_1 j_2)} = \mathcal{D}^{j_1} \times \mathcal{D}^{j_2} .$$

Les représentations irréductibles de $SO(4)$ sont les $\mathcal{D}^{(j_1 j_2)}$ qui passent au quotient dans la projection σ de $SU(2) \times SU(2)$ sur $SO(4)$, c'est-à-dire qui vérifient $\mathcal{D}^{(j_1 j_2)}(-I, -I) = \text{Id}_{V_{j_1} \otimes V_{j_2}}$. Or,

$$\mathcal{D}^{(j_1 j_2)}(-I, -I)(v_1 \otimes v_2) = \mathcal{D}^{j_1}(-I)v_1 \otimes \mathcal{D}^{j_2}(-I)v_2 = (-1)^{j_1+j_2}v_1 \otimes v_2 .$$

Les représentations irréductibles de $SO(4)$ sont donc les $\mathcal{D}^{(j_1 j_2)}$, $(j_1, j_2) \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \times \frac{1}{2}\mathbb{N}$, telles que $j_1 + j_2 \in \mathbb{N}$.

Les représentations irréductibles de $SU(2) \times SU(2)$ et leurs dimensions sont donc

$\mathcal{D}^{(00)}$	$\mathcal{D}^{(0\frac{1}{2})}$	$\mathcal{D}^{(01)}$	$\mathcal{D}^{(0\frac{3}{2})}$	$\mathcal{D}^{(02)}$...	$\mathcal{D}^{(0j_2)}$...
1	2	3	4	5		$2j_2 + 1$	
$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}0)}$	$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}\frac{1}{2})}$	$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}1)}$	$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}\frac{3}{2})}$	$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}2)}$...	$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}j_2)}$...
2	4	6	8	10		$2(2j_2 + 1)$...
$\mathcal{D}^{(10)}$	$\mathcal{D}^{(1\frac{1}{2})}$	$\mathcal{D}^{(11)}$	$\mathcal{D}^{(1\frac{3}{2})}$	$\mathcal{D}^{(12)}$...	$\mathcal{D}^{(1j_2)}$...
3	6	9	12	15		$3(2j_2 + 1)$...
...
$\mathcal{D}^{(j_1 0)}$	$\mathcal{D}^{(j_1 \frac{1}{2})}$	$\mathcal{D}^{(j_1 1)}$	$\mathcal{D}^{(j_1 \frac{3}{2})}$	$\mathcal{D}^{(j_1 2)}$...	$\mathcal{D}^{(j_1 j_2)}$...
$2j_1 + 1$	$2(2j_1 + 1)$	$3(2j_1 + 1)$	$4(2j_1 + 1)$	$5(2j_1 + 1)$		$(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$...
...

Les représentations irréductibles de $SO(4)$ sont les

$\mathcal{D}^{(00)}$	$\mathcal{D}^{(01)}$	$\mathcal{D}^{(02)}$...	$\mathcal{D}^{(0j_2)}$	j_2 entier
$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}\frac{1}{2})}$	$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}\frac{3}{2})}$...	$\mathcal{D}^{(\frac{1}{2}j_2)}$	j_2 non entier
$\mathcal{D}^{(10)}$	$\mathcal{D}^{(11)}$...	$\mathcal{D}^{(1j_2)}$	j_2 entier
...
...	$\mathcal{D}^{(j_1 j_2)}$	j_1 et j_2 entiers ou j_1 et j_2 non entiers .

Deuxième partie

5. Par définition, on a

$$\begin{aligned} & D(\rho_1 \times \rho_2)(X_1, X_2)(v_1 \otimes v_2) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \rho_1(\exp(tX_1))v_1 \otimes \rho_2(\exp(tX_2))v_2 \\ &= D\rho_1(X_1)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes D\rho_2(X_2)v_2 . \end{aligned}$$

6. Dans V^j , on utilise la base $(|j, -j\rangle, |j, -j+1\rangle, \dots, |j, j-1\rangle, |j, j\rangle)$ dans cet ordre. La matrice de $D^j(J_3)$ dans cette base est

$$\begin{pmatrix} -j & 0 & & 0 \\ 0 & -j+1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & j \end{pmatrix} .$$

D'autre part $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$, d'où $J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ et $J_2 = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$, d'où

$$D^j(J_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2j} & 0 & \cdot \\ \sqrt{2j} & 0 & \sqrt{2(2j-1)} & \cdot \\ 0 & \sqrt{2(2j-1)} & 0 & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^j(J_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{2j} & 0 & \cdot \\ -i\sqrt{2j} & 0 & i\sqrt{2(2j-1)} & \cdot \\ 0 & -i\sqrt{2(2j-1)} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base $(|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle)$ de $V^{\frac{1}{2}}$, on a

$$D^{\frac{1}{2}}(J_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{\frac{1}{2}}(J_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{\frac{1}{2}}(J_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la base $(|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle)$ de V^1 , on a

$$D^1(J_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$D^{(j_1, j_2)}(X, 0) = D^{j_1}(X) \otimes \text{Id}_{V^{j_2}}, \quad D^{(j_1, j_2)}(0, X) = \text{Id}_{V^{j_1}} \otimes D^{j_2}(X).$$

On pose, pour j_1 et j_2 fixés, $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = |m_1 ; m_2\rangle$ et l'on utilise la base $(| -j_1 ; -j_2\rangle, | -j_1 ; -j_2 + 1\rangle, \dots, | -j_1 ; j_2\rangle, | -j_1 + 1 ; -j_2\rangle, \dots, | -j_1 + 1 ; j_2\rangle, \dots, | j_1 ; j_2\rangle)$.

6.a) Soit $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$. On a

$$D^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(J_3, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(0, J_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(J_1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(0, J_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$D^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(J_2, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(0, J_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

6.b) Soit $j_1 = 1$ et $j_2 = \frac{1}{2}$. On a

$$D^{(1\frac{1}{2})}(J_3, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$D^{(1\frac{1}{2})}(0, J_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.c) Soit $j_1 = \frac{1}{2}$ et $j_2 = 1$. On a

$$D^{(\frac{1}{2}1)}(J_3, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$D^{(\frac{1}{2}1)}(0, J_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Si $j_1 > j_2$, alors j_1 est une valeur propre de $D^{(j_1 j_2)}(J_3, 0)$ et non de $D^{(j_2 j_1)}(J_3, 0)$. Si $j_2 > j_1$, alors j_2 est une valeur propre de $D^{(j_2 j_1)}(J_3, 0)$ et non de $D^{(j_1 j_2)}(J_3, 0)$. Donc la représentation est équivalente à $D^{(j_2 j_1)}$ si et seulement si $j_1 = j_2$.

$$\begin{aligned} 8. \text{ On a } \sum_{\ell=1}^3 D^{(j_1 j_2)}(J_\ell^2, 0)(v_1 \otimes v_2) &= \sum_{\ell=1}^3 D^{j_1}(J_\ell^2)v_1 \otimes v_2 \\ &= j_1(j_1 + 1)v_1 \otimes v_2, \end{aligned}$$

donc

$$C_i^{(j_1 j_2)} = j_i(j_i + 1), \quad i = 1, 2.$$

9. De $R^2 = e^4 + 2E\frac{l^2 + \hbar^2}{m}$, on tire

$$-\frac{m}{2E}R^2 + l^2 + \hbar^2 = -\frac{me^4}{2E},$$

d'où, en remplaçant,

$$\hbar^2(2(C_1^{jj} + C_2^{jj}) + 1) = -\frac{me^4}{2E}$$

Comme $C_1^{jj} = C_2^{jj} = j(j+1)$, et comme on a posé $\frac{me^4}{2\hbar^2} = R_H$, on obtient

$$E = -\frac{R_H}{(2j+1)^2},$$

soit

$$E = -\frac{R_H}{n^2}.$$

Cette dégénérescence, qui est observée expérimentalement, s'explique donc par la symétrie $SO(4)$ de l'atome d'hydrogène, groupe de symétrie plus grand que la symétrie évidente par le groupe $SO(3)$. C'est ce qu'on appelle la "symétrie cachée de l'atome d'hydrogène". L'opérateur (R_1, R_2, R_3) correspond au vecteur de Lenz-Pauli \vec{R} en mécanique classique. Le fait qu'il s'agisse d'une représentation avec $j_1 = j_2$ est une conséquence du fait que le vecteur de Lenz-Pauli \vec{R} est orthogonal au moment cinétique orbital \vec{l} .

Voir [Blaziot-Tolédano, chapitre 5]. Dans d'autres ouvrages, la constante appelée constante de Rydberg est $R'_H = \frac{R_H}{h} = \frac{R_H}{2\pi\hbar}$. Les valeurs de ces constantes sont $R_H = 13,61$ eV et $R'_H = 3,29 \cdot 10^{15}$ s⁻¹.

Remarque Dans la base $(|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle)$ de V^1 , on a

$$D^1(J_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D^1(J_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{2} \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Opérateurs de projection

Première partie

Soit $G = \mathfrak{S}_3$ le groupe symétrique sur trois éléments. On désigne par c la permutation circulaire $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et par t la transposition $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On désigne par ρ_0 la représentation de \mathfrak{S}_3 dans \mathbb{C}^2 telle que

$$\rho_0(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad \rho_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $E = \mathcal{F}(G) = \mathbb{C}[G]$ l'espace vectoriel des fonctions sur G à valeurs dans \mathbb{C} , de base $(\epsilon_g)_{g \in G}$. Soit (E, R) la représentation régulière de G .

1. Écrire la décomposition de R en somme directe de représentations irréductibles.

On se propose de déterminer un sous-espace vectoriel de E , invariant par R et tel que la restriction de R à ce sous-espace soit équivalente à ρ_0 .

On désigne par $\rho_{\alpha\beta}$ les coefficients matriciels de ρ_0 ($1 \leq \alpha \leq 2, 1 \leq \beta \leq 2$). On pose

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \sum_{g \in G} \rho_{\beta\alpha}(g^{-1})R(g) \in \text{End}(E).$$

2. a) Déterminer les matrices $\rho_0(e), \rho_0(c^2), \rho_0(tc), \rho_0(tc^2)$.

b) Expliciter P_{11}, P_{22}, P_{21} et P_{12} comme combinaisons linéaires de $R(g), g \in G$.

c) Calculer $P_{11}(\epsilon_h)$, pour tout $h \in G$. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $P_{11}(E)$ de E ? Est-il invariant par R ?

d) Mêmes questions qu'en c) en remplaçant P_{11} par P_{22} .

3. Choisir une base (u_1, u'_1) de $P_{11}(E)$.

a) Calculer $P_{21}(u_1)$ et montrer que $P_{21}(u_1) \in P_{22}(E)$.

b) Soit $E_{0,1}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par u_1 et $P_{21}(u_1)$. Montrer que $E_{0,1}$ est invariant par R et que la restriction de R à $E_{0,1}$ est équivalente à ρ_0 .

c) Que peut-on dire de $R|_{E'_{0,1}}$ où $E'_{0,1}$ est le sous-espace vectoriel E engendré par u'_1 et $P_{21}(u'_1)$?

4. Montrer que $P_{11} + P_{22}$ est le projecteur P_0 de E sur la composante isotypique de type ρ_0 de E , et que $P_0(E) = E_{0,1} \oplus E'_{0,1}$.

Deuxième partie

Soit G un groupe fini, et soient $(E^{(i)}, \rho^{(i)}), i = 1, \dots, N$, ses représentations irréductibles inéquivalentes. On pose $\dim E^{(i)} = d_i$ et l'on désigne par $\rho_{\alpha\beta}^{(i)}$ pour $1 \leq \alpha \leq d_i, 1 \leq \beta \leq d_i$, les coefficients matriciels de la représentation $\rho^{(i)}$ dans une base (e_α) de $E^{(i)}$. On rappelle que, pour tous entiers $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ entre 1 et d_i ,

$$(1) \quad \sum_{g \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(g^{-1})\rho_{\lambda\mu}^{(j)}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \frac{|G|}{d_i} \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Soit (E, ρ) une représentation de G . On pose $E = \bigoplus_{i=1}^N V^{(i)}$, où $V^{(i)} = m_i E^{(i)}$. On fixe l'indice $i, 1 \leq i \leq N$, et pour $1 \leq \alpha \leq d_i, 1 \leq \beta \leq d_i$, on considère

$$P_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(g^{-1})\rho(g) \in \text{End}(E).$$

5. Comparer $\sum_{\alpha=1}^{d_i} P_{\alpha\alpha}^{(i)}$ avec le projecteur $P^{(i)}$ de E sur la composante isotypique $V^{(i)}$ de E .

6. Soient $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N$. Montrer que $P_{\alpha\beta}^{(i)}(V^{(j)}) = \{0\}$ et que

$$P_{\alpha\beta}^{(i)}(e_\gamma) = \delta_{\beta\gamma} e_\alpha, \text{ pour } 1 \leq \gamma \leq d_i.$$

7. a) Soient $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ des entiers entre 1 et d_i . Montrer que $P_{\alpha\beta}^{(i)} \circ P_{\lambda\mu}^{(j)} = 0$ si $i \neq j$, et que

$$P_{\alpha\beta}^{(i)} \circ P_{\lambda\mu}^{(i)} = \delta_{\beta\lambda} P_{\alpha\mu}^{(i)} .$$

b) En déduire que $P_{\alpha\beta}^{(i)}$ s'annule sur $P_{\gamma\gamma}^{(i)}(E)$ si $\gamma \neq \beta$, et que $P_{\alpha\beta}^{(i)}$ définit un isomorphisme de $P_{\beta\beta}^{(i)}(E)$ sur $P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E)$.

8. Montrer que $\rho(g) \circ P_{\alpha\beta}^{(i)} = \sum_{\gamma=1}^{d_i} \rho_{\gamma\alpha}^{(i)}(g) P_{\gamma\beta}^{(i)}$.

9. Soit $x \in P_{11}^{(i)}(E)$. On pose, pour $\beta = 1, \dots, d_i$, $x_\beta = P_{\beta 1}^{(i)}(x)$. Soit $E_1^{(i)}(x)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par (x_1, \dots, x_{d_i}) . Montrer que la restriction de ρ à $E_1^{(i)}(x)$ est équivalente à $\rho^{(i)}$.

10. Comment peut-on obtenir m_i sous-espaces vectoriels de E dont la somme directe soit $V^{(i)}$ et tels que la restriction de ρ à chacun deux soit équivalente à $\rho^{(i)}$?

11. Pour appliquer un procédé analogue à la décomposition d'une représentation d'un groupe compact, comment pourrait-on définir des opérateurs de projection $P_{\alpha\beta}^{(i)}$?

“La technique des opérateurs de projection est extrêmement utile, élégante et efficace dans la solution de divers problèmes pratiques en théorie des représentations et en physique quantique.”

[Barut-Račka, p.177]

Corrigé

Première partie

1. Les représentations irréductibles de $G = \mathfrak{S}_3$ sont la représentation triviale et la représentation signature, toutes deux de dimension 1, et la représentation ρ_0 de dimension 2. D'où

$$R = Id \oplus sg \oplus 2\rho_0 .$$

2. a) En effectuant les produits de matrices, on obtient

$$\rho_0(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_0(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \rho_0(c^2) = \begin{pmatrix} j^2 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix},$$

$$\rho_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho_0(tc) = \begin{pmatrix} 0 & j^2 \\ j & 0 \end{pmatrix}, \rho_0(tc^2) = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On fera usage des relations $c^3 = e, t^2 = e, ct = tc^2, c^2t = tc$ et $ctc = t$.

b) Remarquons que $c^{-1} = c^2, (c^2)^{-1} = c$. Par définition

$$P_{11} = \frac{1}{3}(R(e) + j^2 R(c) + j R(c^2)),$$

$$P_{22} = \frac{1}{3}(R(e) + j R(c) + j^2 R(c^2)).$$

Comme t , tc et tc^2 sont égaux à leurs inverses, et comme e , c et c^2 sont diagonales, on obtient

$$P_{12} = \frac{1}{3} \sum_{g \in G} \rho_{21}(g^{-1})R(g) = \frac{1}{3}(R(t) + jR(tc) + j^2R(tc^2)) ,$$

$$P_{21} = \frac{1}{3} \sum_{g \in G} \rho_{12}(g^{-1})R(g) = \frac{1}{3}(R(t) + j^2R(tc) + jR(tc^2)) .$$

c) On sait que $R(g)\epsilon_h = \epsilon_{gh}$, pour $g, h \in G$. Donc

$$P_{11}(\epsilon_h) = \frac{1}{3}(\epsilon_h + j^2\epsilon_{ch} + j\epsilon_{c^2h}).$$

D'où

$$P_{11}(\epsilon_e) = \frac{1}{3}(\epsilon_e + j^2\epsilon_c + j\epsilon_{c^2}),$$

$$P_{11}(\epsilon_t) = \frac{1}{3}(\epsilon_t + j^2\epsilon_{ct} + j\epsilon_{c^2t}) = \frac{1}{3}(\epsilon_t + j\epsilon_{tc} + j^2\epsilon_{tc^2}).$$

Posons

$$P_{11}(\epsilon_e) = u_1, \quad P_{11}(\epsilon_t) = u'_1 ,$$

qui sont linéairement indépendants. On a

$$P_{11}(\epsilon_c) = ju_1 , \quad P_{11}(\epsilon_{c^2}) = j^2u_1,$$

$$P_{11}(\epsilon_{tc}) = j^2u'_1 , \quad P_{11}(\epsilon_{tc^2}) = ju'_1 .$$

Donc $P_{11}(E)$ est de dimension 2.

On a $R(t)u_1 = \frac{1}{3}(\epsilon_t + j^2\epsilon_{tc} + j\epsilon_{tc^2})$ qui n'appartient pas à $P_{11}(E)$. Donc $P_{11}(E)$ n'est pas invariant par R .

d) D'après b) et la relation $R(g)\epsilon_h = \epsilon_{gh}$, on obtient

$$P_{22}(\epsilon_h) = \frac{1}{3}(\epsilon_h + j\epsilon_{ch} + j^2\epsilon_{c^2h}).$$

D'où

$$P_{22}(\epsilon_e) = \frac{1}{3}(\epsilon_e + j\epsilon_c + j^2\epsilon_{c^2}),$$

$$P_{22}(\epsilon_t) = \frac{1}{3}(\epsilon_t + j\epsilon_{ct} + j^2\epsilon_{c^2t}) = \frac{1}{3}(\epsilon_t + j^2\epsilon_{tc} + j\epsilon_{tc^2}).$$

Posons

$$P_{22}(\epsilon_t) = v_1, \quad P_{22}(\epsilon_e) = v'_1 ,$$

qui sont linéairement indépendants. On a

$$P_{22}(\epsilon_c) = j^2v'_1 , \quad P_{22}(\epsilon_{c^2}) = jv'_1,$$

$$P_{22}(\epsilon_{tc}) = jv_1 , \quad P_{22}(\epsilon_{tc^2}) = j^2v_1.$$

Donc $P_{22}(E)$ est de dimension 2.

On a $R(t)v_1 = \frac{1}{3}(\epsilon_e + j^2\epsilon_c + j\epsilon_{c^2})$ qui n'appartient pas à $P_{22}(E)$. Donc $P_{22}(E)$ n'est pas invariant par R .

3. a) Calculons $P_{21}(u_1) = \frac{1}{3}(R(t)u_1 + j^2R(tc)u_1 + jR(tc^2)u_1)$. On a

$$\begin{aligned} R(t)u_1 &= \frac{1}{3}(\epsilon_t + j^2\epsilon_{tc} + j\epsilon_{tc^2}) = v_1, \\ R(tc)u_1 &= \frac{1}{3}(\epsilon_{tc} + j^2\epsilon_{tc^2} + j\epsilon_t) = jv_1, \\ R(tc^2)u_1 &= \frac{1}{3}(\epsilon_{tc^2} + j^2\epsilon_t + j\epsilon_{tc}) = j^2v_1, \end{aligned}$$

D'où $P_{21}(u_1) = v_1$, qui appartient à $P_{22}(E)$. De plus u_1 et v_1 sont linéairement indépendants.

b) On a $R(c)u_1 = \frac{1}{3}(\epsilon_c + j^2\epsilon_{c^2} + j\epsilon_e) = ju_1$ et $R(t)u_1 = v_1$, donc u_1 et $P_{21}(u_1)$ engendrent un sous-espace vectoriel $E_{0,1}$ de E , de dimension 2 et invariant par R . On a $R(c)v_1 = \frac{1}{3}(\epsilon_{tc^2} + j\epsilon_{tc} + j^2\epsilon_t) = j^2v_1$ et $R(t)v_1 = \frac{1}{3}(\epsilon_e + j\epsilon_{c^2} + j^2\epsilon_c) = u_1$. Donc les matrices de $R|_{E_{0,1}}$ dans la base (u_1, v_1) sont

$$C = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $R|_{E_{0,1}}$ est équivalente à ρ_0 .

c) De même $R|_{E'_{0,1}}$ est équivalente à ρ_0 .

4. Par définition,

$$\begin{aligned} P_{11} + P_{22} &= \frac{1}{3} \sum_{g \in G} (\rho_{11}(g^{-1}) + \rho_{22}(g^{-1}))R(g) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho_0}(g)} R(g) \end{aligned}$$

où χ_{ρ_0} est le caractère de la représentation ρ_0 . On sait que cet endomorphisme de E est le projecteur sur la composante isotypique de type ρ_0 , qui a ici multiplicité 2. Comme $E_{0,1}$ et $E'_{0,1}$ sont de type ρ_0 et d'intersection $\{0\}$, on a

$$P_0(E) = E_{0,1} \oplus E'_{0,1}.$$

Deuxième partie

5. On sait que $\sum_{\alpha=1}^{d_i} \rho_{\alpha\alpha}^{(i)}(g^{-1}) = \chi_{\rho^{(i)}}(g^{-1}) = \overline{\chi_{\rho^{(i)}}(g)}$. Donc, d'après les définitions,

$$\sum_{\alpha=1}^{d_i} P_{\alpha\alpha}^{(i)} = P^{(i)}.$$

6. Soit $(\varphi_\lambda)_{\lambda=1, \dots, d_j}$, une base de $E^{(j)}$. On a $\rho(g)(\varphi_\mu) = \sum_{\lambda=1}^{d_j} \rho_{\lambda\mu}^{(j)}(g)\varphi_\lambda$, d'où

$$P_{\alpha\beta}^{(i)}(\varphi_\mu) = \frac{d_i}{|G|} \sum_{\lambda=1}^{d_j} \left(\sum_{g \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(g^{-1}) \rho_{\lambda\mu}^{(j)}(g) \right) \varphi_\lambda = 0,$$

si $i \neq j$, d'après (1). Comme $V^{(j)} = m_j E^{(j)}$, l'opérateur $P_{\alpha\beta}^{(i)}$ s'annule sur $V^{(j)}$.

D'autre part, en utilisant (1) pour $i = j$,

$$P_{\alpha\beta}^{(i)}(e_\gamma) = \frac{d_i}{|G|} \sum_{\lambda=1}^{d_i} \left(\sum_{g \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(g^{-1}) \rho_{\lambda\gamma}^{(i)}(g) \right) e_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{d_i} \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\gamma} e_\lambda = \delta_{\beta\gamma} e_\alpha .$$

7. a) Calculons

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{(i)} \circ P_{\lambda\mu}^{(j)} &= \frac{d_i d_j}{|G|^2} \left(\sum_{g \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(g^{-1}) \rho(g) \right) \circ \left(\sum_{h \in G} \rho_{\mu\lambda}^{(j)}(h^{-1}) \rho(h) \right) \\ &= \frac{d_i d_j}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(g^{-1}) \rho_{\mu\lambda}^{(j)}(h^{-1}) \rho(gh). \end{aligned}$$

Posant $gh = k$, d'où $g^{-1} = hk^{-1}$, on obtient

$$P_{\alpha\beta}^{(i)} \circ P_{\lambda\mu}^{(j)} = \frac{d_i d_j}{|G|^2} \sum_{k \in G} \left(\sum_{h \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(hk^{-1}) \rho_{\mu\lambda}^{(j)}(h^{-1}) \right) \rho(k).$$

On utilise, $\rho_{\beta\alpha}^{(i)}(hk^{-1}) = \sum_{\gamma=1}^{d_i} \rho_{\beta\gamma}^{(i)}(h) \rho_{\gamma\alpha}^{(i)}(k^{-1})$, puis la relation (1) et l'on obtient,

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^{(i)} \circ P_{\lambda\mu}^{(j)} &= \frac{d_i d_j}{|G|^2} \sum_{k \in G} \sum_{\gamma=1}^{d_i} \left(\sum_{h \in G} \rho_{\beta\gamma}^{(i)}(h) \rho_{\mu\lambda}^{(j)}(h^{-1}) \right) \rho_{\gamma\alpha}^{(i)}(k^{-1}) \rho(k) \\ &= \delta_{ij} \frac{d_i}{|G|} \sum_{k \in G} \sum_{\gamma=1}^{d_i} \delta_{\gamma\mu} \delta_{\beta\lambda} \rho_{\gamma\alpha}^{(i)}(k^{-1}) \rho(k) = \delta_{ij} \delta_{\beta\lambda} \frac{d_i}{|G|} \sum_{k \in G} \rho_{\mu\alpha}^{(i)}(k^{-1}) \rho(k) = \delta_{ij} \delta_{\beta\lambda} P_{\alpha\mu}^{(i)}, \end{aligned}$$

ce qui démontre les résultats cherchés.

b) En particulier $P_{\alpha\alpha}^{(i)} \circ P_{\beta\beta}^{(j)} = 0$, si $i \neq j$, et $P_{\alpha\beta}^{(i)} \circ P_{\gamma\gamma}^{(i)} = 0$, si $\gamma \neq \beta$. De plus,

$$P_{\alpha\alpha}^{(i)} \circ P_{\beta\beta}^{(i)} = 0, \text{ si } \alpha \neq \beta, \quad P_{\alpha\alpha}^{(i)} \circ P_{\alpha\alpha}^{(i)} = P_{\alpha\alpha}^{(i)},$$

ce qui montre que les $P_{\alpha\alpha}^{(i)}$ sont des projecteurs orthogonaux. Cela entraîne que les sous-espaces vectoriels $P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E)$ et $P_{\beta\beta}^{(i)}(E)$ sont d'intersection nulle si $\alpha \neq \beta$.

Montrons maintenant, à l'aide du résultat de la question a), que $P_{\alpha\beta}^{(i)}$ est un isomorphisme de $P_{\beta\beta}^{(i)}(E)$ sur $P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E)$. Tout d'abord,

$$P_{\alpha\beta}^{(i)} \circ P_{\beta\beta}^{(i)} = P_{\alpha\beta}^{(i)} = P_{\alpha\alpha}^{(i)} \circ P_{\alpha\beta}^{(i)},$$

donc $P_{\alpha\beta}^{(i)}(P_{\beta\beta}^{(i)}(E)) \subset P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E)$. D'autre part, montrons que la restriction de $P_{\alpha\beta}^{(i)}$ à $P_{\beta\beta}^{(i)}(E)$ est bijective. Elle est injective car si $u \in E$ satisfait $P_{\alpha\beta}^{(i)} P_{\beta\beta}^{(i)}(u) = 0$, on a $0 = P_{\beta\alpha}^{(i)} P_{\alpha\beta}^{(i)} P_{\beta\beta}^{(i)}(u) = P_{\beta\beta}^{(i)} P_{\beta\beta}^{(i)}(u) = P_{\beta\beta}^{(i)}(u)$. Elle est aussi surjective sur $P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E)$, car pour tout $u \in E$, et pour tout $\beta = 1, \dots, d_i$,

$$P_{\alpha\alpha}^{(i)}(u) = P_{\alpha\beta}^{(i)} P_{\beta\alpha}^{(i)}(u) = P_{\alpha\beta}^{(i)} P_{\beta\beta}^{(i)} P_{\beta\alpha}^{(i)}(u),$$

donc $P_{\alpha\alpha}^{(i)}(u)$ appartient à l'image par $P_{\alpha\beta}^{(i)}$ de $P_{\beta\beta}^{(i)}(E)$.

8. Calculons $\rho(g) \circ P_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{d_i}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(h^{-1}) \rho(g) \rho(h)$. Posons $gh = k$, d'où $h = g^{-1}k$ et $h^{-1} = k^{-1}g$. On obtient

$$\begin{aligned} \rho(g) \circ P_{\alpha\beta}^{(i)} &= \frac{d_i}{|G|} \sum_{k \in G} \rho_{\beta\alpha}^{(i)}(k^{-1}g) \rho(k) \\ &= \frac{d_i}{|G|} \sum_{k \in G} \sum_{\gamma=1}^{d_i} \rho_{\beta\gamma}^{(i)}(k^{-1}) \rho_{\gamma\alpha}^{(i)}(g) \rho(k) \\ &= \sum_{\gamma=1}^{d_i} \rho_{\gamma\alpha}^{(i)}(g) P_{\gamma\beta}^{(i)}. \end{aligned}$$

9. On considère la famille $(x_\beta = P_{\beta 1}^{(i)}(x))_{\beta=1, \dots, d_i}$, où $x \in P_{11}^{(i)}(E)$. Montrons que $(x_1, \dots, x_\beta, \dots, x_{d_i})$ sont linéairement indépendants. Remarquons d'abord que $x_1 = x$, car $(P_{11}^{(i)})^2 = P_{11}^{(i)}$. Supposons qu'il existe des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_{d_i}$ tels que $\sum_{\beta=1}^{d_i} \lambda_\beta P_{\beta 1}^{(i)}(x) = 0$. Alors, pour tout $\alpha = 1, \dots, d_i$,

$$\sum_{\beta=1}^{d_i} \lambda_\beta P_{1\alpha}^{(i)} P_{\beta 1}^{(i)}(x) = \sum_{\beta=1}^{d_i} \lambda_\beta \delta_{\alpha\beta} P_{11}^{(i)}(x) = \lambda_\alpha x.$$

Comme $x \neq 0$, on voit que $\lambda_\alpha = 0$, pour tout α . L'espace vectoriel $E_1^{(i)}(x)$ engendré par (x_1, \dots, x_{d_i}) est donc de dimension d_i . On peut aussi remarquer que $P_{\beta 1}^{(i)}$ est un isomorphisme de $P_{11}^{(i)}(E)$ sur $P_{\beta\beta}^{(i)}(E)$ et que les $(P_{\beta\beta}^{(i)}(E))_{\beta=1, \dots, d_i}$ forment une somme directe, car les $P_{\beta\beta}^{(i)}$ sont des projecteurs orthogonaux.

On a, d'après la relation démontrée à la question 8),

$$\begin{aligned} \rho(g)x_\beta &= \rho(g)(P_{\beta 1}^{(i)}(x)) = \sum_{\gamma=1}^{d_i} \rho_{\gamma\beta}^{(i)}(g) P_{\gamma 1}^{(i)}(x) \\ &= \sum_{\gamma=1}^{d_i} \rho_{\gamma\beta}^{(i)}(g) x_\gamma, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\rho|_{E_1^{(i)}(x)}$ est équivalente à $\rho^{(i)}$.

10. Pour obtenir m_i sous-espaces vectoriels de E dont la somme directe soit $V^{(i)}$ et portant chacun la représentation $\rho^{(i)}$, il suffit d'appliquer le procédé de la question 9) successivement aux vecteurs d'une base de $P_{11}^{(i)}(E)$, comme on l'a fait dans la première partie. En effet, on a vu que pour x fixé dans $P_{11}^{(i)}(E)$, le sous-espace vectoriel $E_1^{(i)}(x)$ correspondant est invariant par G . Si x et y sont linéairement indépendants, $E_1^{(i)}(x) \cap E_1^{(i)}(y)$ est réduit à $\{0\}$ d'après l'irréductibilité de la représentation $\rho^{(i)}$.

On a déjà remarqué que les $(P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E))_{\alpha=1, \dots, d_i}$ forment une somme directe. On a $V^{(i)} = P^{(i)}(E) = \left(\sum_{\alpha=1}^{d_i} P_{\alpha\alpha}^{(i)}\right)(E)$, et d'après ce qui précède,

$$V^{(i)} = \bigoplus_{\alpha=1}^{d_i} P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E).$$

Comme les $P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E)$, $\alpha = 1, \dots, d_i$, sont isomorphes, on a $\dim P_{\alpha\alpha}^{(i)}(E) = m_i$. Donc en choisissant m_i vecteurs de base (x^1, \dots, x^{m_i}) dans $P_{11}^{(i)}(E)$ et en leur appliquant le procédé de la question 9) on obtiendra bien m_i sous-espaces-vectoriels $E_1^{(i)}(x^A)$, $A = 1, \dots, m_i$,

tels que $\rho_{|E_1^{(i)}(x^A)}$ est équivalente à $\rho^{(i)}$ pour tout A , et $V^{(i)} = \bigoplus_{A=1}^{m_i} E_1^{(i)}(x^A)$. C'est la décomposition cherchée.

Evidemment, la première partie du problème a consisté en l'étude directe d'un cas particulier de ce procédé, où $\rho^{(i)} = \rho_0$, on a choisi la base (u_1, u'_1) de $P_{11}^{(i)}(E) = P_{11}(E)$ et on a posé $E_1^{(i)}(u^1) = E_{0,1}$, $E_1^{(i)}(u'_1) = E'_{0,1}$.

11. Pour un groupe compact, on utilise l'intégrale de Haar $\int_G f(g)dg$ pour définir

$$P_{\alpha\beta}^{(i)} = d_i \int_G \rho_{\alpha\beta}^{(i)}(g^{-1})\rho(g)dg ,$$

et l'on procède comme dans le cas d'un groupe fini.

Remarque Cette méthode est utile pour la détermination des coefficients de Clebsch-Gordan, et elle a de nombreuses applications en mécanique quantique (voir par exemple dans [Barut-Rączka], p. 183, l'étude de la distribution des états de spin isotopique pour un ensemble de particules libres).

5 Symétries du C_{60}

On se propose d'étudier certaines propriétés du groupe de l'icosaèdre qui est le groupe des symétries de rotation des molécules ballons de football (C_{60} ou fullerènes).

Première partie : table des caractères de \mathfrak{S}_5

On supposera connue la liste des classes de conjugaison du groupe symétrique \mathfrak{S}_5 sur 5 objets et le nombre d'éléments de chaque classe, donnés ci-après. On note

e la classe de l'identité, à 1 élément,

a la classe de la permutation (12) : $(1,2,3,4,5) \mapsto (2,1,3,4,5)$, à 10 éléments,

α la classe de (123) : $(1,2,3,4,5) \mapsto (2,3,1,4,5)$, à 20 éléments,

b la classe de (1234) : $(1,2,3,4,5) \mapsto (2,3,4,1,5)$, à 30 éléments,

γ la classe de (12345) : $(1,2,3,4,5) \mapsto (2,3,4,5,1)$, à 24 éléments,

β la classe de (12)(34) : $(1,2,3,4,5) \mapsto (2,1,4,3,5)$, à 15 éléments,

c la classe de (12)(345) : $(1,2,3,4,5) \mapsto (2,1,4,5,3)$, à 20 éléments.

1. La représentation de permutation \mathfrak{S}_5 se décompose en la somme directe de la représentation triviale ρ_1 et d'une représentation ρ_4 de dimension 4. Déterminer leurs caractères. Déterminer le caractère de la représentation signature, ρ'_1 , puis le caractère de la représentation ρ'_4 obtenue par produit tensoriel de ρ_4 avec ρ'_1 . Vérifier que ρ_4 et ρ'_4 sont irréductibles.

2. Montrer que pour toute représentation de dimension finie (V, ρ) d'un groupe fini G , de caractère χ_ρ , le caractère de la représentation $\wedge^2 \rho$ vérifie

$$\chi_{\wedge^2 \rho}(g) = (1/2)((\chi_\rho(g))^2 - \chi_\rho(g^2)) ,$$

et que $\chi_{S^2\rho} = (\chi_\rho)^2 - \chi_{\wedge^2\rho}$.

3. Calculer les caractères des représentations $\wedge^2(\rho_4)$ et $S^2(\rho_4)$ (on pourra utiliser les relations, $\alpha^2 = \alpha, b^2 = b, \gamma^2 = \gamma, c^2 = \alpha$). Montrer que $\wedge^2(\rho_4)$ est irréductible. Montrer que $S^2(\rho_4)$ est somme directe de trois représentations irréductibles, puis montrer que $S^2(\rho_4) = \rho_1 \oplus \rho_4 \oplus \rho_5$, où ρ_5 est une représentation irréductible de dimension 5.

4. Établir la table des caractères des représentations irréductibles de \mathfrak{S}_5 .

Deuxième partie : table des caractères de \mathfrak{A}_5

On donne la liste des classes de conjugaison du groupe alterné \mathfrak{A}_5 avec le nombre d'éléments de chaque classe :

e la classe de l'identité, à 1 élément,

α la classe de (123) , à 20 éléments,

β la classe de $(12)(34)$, à 15 éléments,

γ la classe de (12345) , à 12 éléments,

γ^2 la classe de $(23451) : (1,2,3,4,5) \mapsto (3,4,5,1,2)$, à 12 éléments.

5. Montrer que les représentations ρ_1, ρ_4 et ρ_5 restent irréductibles en restriction à \mathfrak{A}_5 . On les notera encore ρ_1, ρ_4, ρ_5 .

Montrer que la restriction à \mathfrak{A}_5 de $\wedge^2(\rho_4)$ est la somme directe de deux représentations irréductibles inéquivalentes, ρ_3 et ρ'_3 , et que chacune d'elles est de dimension 3.

6. Soit $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. Montrer que les valeurs des caractères des représentations ρ_3 et ρ'_3 de \mathfrak{A}_5 sur les classes $(e, \alpha, \beta, \gamma, \gamma^2)$ sont $(3, 0, -1, \tau, 1 - \tau)$ et $(3, 0, -1, 1 - \tau, \tau)$.

7. Établir la table des caractères des représentations irréductibles de \mathfrak{A}_5 .

Troisième partie : quelques représentations du groupe de l'icosaèdre

On sait que le groupe \mathfrak{A}_5 s'identifie au sous-groupe \mathcal{I} du groupe des rotations de \mathbb{R}^3 qui laissent invariant un icosaèdre régulier. Dans cette identification, les éléments des classes de conjugaison $(e, \alpha, \beta, \gamma, \gamma^2)$ de \mathfrak{A}_5 deviennent des rotations d'angles $(0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5})$, respectivement. On rappelle que $2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$.

8. On désigne par p le morphisme de revêtement de $SU(2)$ sur $SO(3)$. Quelle est l'image par p de l'élément $g_\alpha = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$?

Pour $j \in \mathbb{N}$, on désigne par $\underline{\mathcal{D}}^j$ la représentation irréductible de dimension $2j + 1$ de $\text{SO}(3)$ obtenue à partir de la représentation \mathcal{D}^j de $\text{SU}(2)$ par passage au quotient. Montrer que la valeur du caractère $\chi_{\underline{\mathcal{D}}^j}$ de $\underline{\mathcal{D}}^j$ sur une rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ est

$$\chi_{\underline{\mathcal{D}}^j}(\theta) = \sum_{m=-j}^j e^{im\theta}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on considère la restriction au sous-groupe \mathcal{I} de la représentation $\underline{\mathcal{D}}^j$. On la notera R^j et l'on désignera par χ^j son caractère.

9. Calculer χ^j pour $j \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout élément $g \neq e$ de \mathcal{I} et pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\chi^{30\ell+j}(g) = \chi^j(g).$$

10. Montrer que les représentations R^0, R^1 et R^2 sont irréductibles. Décomposer en somme directe de représentations irréductibles la représentation R^3 , puis les représentations $R^{30\ell+3}$, pour tout entier $\ell \geq 1$.

11. Étudier la décomposition en somme directe de représentations irréductibles de la représentation $R^2 \otimes R^3$ du groupe \mathcal{I} .

Épilogue

On peut étudier de manière analogue les représentations du revêtement d'ordre deux du groupe de l'icosaèdre, image réciproque du groupe \mathcal{I} par le morphisme p . C'est un sous-groupe G de $\text{SU}(2)$ qui a 120 éléments. Il a 9 classes de conjugaison, de représentants g_α , avec

$$\alpha = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}.$$

Ces classes ont 1, 1, 30, 20, 20, 12, 12, 12, 12 éléments respectivement. Pouvez-vous établir la table des caractères des représentations irréductibles de G ? Montrer que, en restriction à G , la représentation \mathcal{D}^j de $\text{SU}(2)$ est irréductible pour $0 \leq j \leq \frac{5}{2}$? étudier la décomposition en somme directe de représentations irréductibles des restrictions à G des représentations $\mathcal{D}^j, j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$?

Corrigé

Première partie

1. Soit ρ_1 la représentation triviale. On sait que $\chi_{\rho_1}(g) = 1$, pour tout g . Dans la représentation de permutation, $\chi(g)$ est le nombre d'éléments laissés invariants par g . Comme $\chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_4} = \chi$, on en déduit le tableau de caractères suivant :

	1	10	20	30	24	15	20
	e	a	α	b	γ	β	c
ρ_1	1	1	1	1	1	1	1
ρ_4	4	2	1	0	-1	0	-1
ρ'_1	1	-1	1	-1	1	1	-1
ρ'_4	4	-2	1	0	-1	0	1

On calcule $(\chi_{\rho_4} | \chi_{\rho_4}) = (\chi_{\rho'_4} | \chi_{\rho'_4}) = \frac{1}{120}(16 + 40 + 20 + 24 + 20) = 1$, donc ρ_4 et ρ'_4 sont irréductibles.

2. La représentation ρ est unitarisable, donc pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable. Soit (e_i) une base de V telle que $\rho(g)e_i = \lambda_i(g)e_i$, où $\lambda_i(g) \in \mathbb{C}$. Alors

$$(\rho(g) \otimes \rho(g))(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) = \lambda_i(g)\lambda_j(g)(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i),$$

d'où

$$\begin{aligned} \chi_{\wedge^2 \rho}(g) &= \sum_{i < j} \lambda_i(g)\lambda_j(g) = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_i \lambda_i(g) \right)^2 - \sum_i (\lambda_i(g))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((\chi_\rho(g))^2 - \chi_\rho(g^2) \right). \end{aligned}$$

Comme $\rho \otimes \rho = \wedge^2 \rho \oplus S^2 \rho$, on a $\chi_{S^2 \rho} = (\chi_\rho)^2 - \chi_{\wedge^2 \rho}$.

3. Le calcul donne

$$\chi_{\wedge^2(\rho_4)} = (6, 0, 0, 0, 1, -2, 0) \quad \text{et} \quad \chi_{S^2(\rho_4)} = (10, 4, 1, 0, 0, 2, 1).$$

On a $(\chi_{\wedge^2(\rho_4)} | \chi_{\wedge^2(\rho_4)}) = \frac{1}{120}(36 + 24 + 60) = 1$, donc $\wedge^2(\rho_4)$ est irréductible. D'autre part,

$$(\chi_{S^2(\rho_4)} | \chi_{S^2(\rho_4)}) = \frac{1}{120}(100 + 160 + 20 + 60 + 20) = 3.$$

On ne peut écrire $3 = \sum m_i^2$, où les m_i sont des entiers, que si trois d'entre eux sont égaux à 1, et les autres nuls. On a

$$(\chi_{S^2(\rho_4)} | \chi_{\rho_1}) = 1, \quad (\chi_{S^2(\rho_4)} | \chi_{\rho_4}) = 1,$$

donc $S^2(\rho_4) = \rho_1 \oplus \rho_4 \oplus \rho_5$, où $\dim \rho_5 = 5$, et $\chi_{\rho_5} = (5, 1, -1, -1, 0, 1, 1)$, donc $(\chi_{\rho_5} | \chi_{\rho_5}) = 1$, et ρ_5 est donc irréductible.

4. Notons $\rho_6 = \wedge^2(\rho_4)$ la représentation irréductible de dimension 6 de \mathfrak{S}_5 . On obtient la table de caractères de \mathfrak{S}_5 .

	1	10	20	30	24	15	20
	e	a	α	b	γ	β	c
ρ_1	1	1	1	1	1	1	1
ρ'_1	1	-1	1	-1	1	1	-1
ρ_4	4	2	1	0	-1	0	-1
ρ'_4	4	-2	1	0	-1	0	1
ρ_5	5	1	-1	-1	0	1	1
ρ'_5	5	-1	-1	1	0	1	-1
ρ_6	6	0	0	0	1	-2	0

On vérifie l'orthogonalité des colonnes et celle des lignes munies du poids égal au nombre d'éléments de chaque classe.

Deuxième partie

5. À partir de la table précédente, on obtient les caractères suivants de \mathfrak{A}_5 .

	1	20	15	12	12
	e	α	β	γ	γ^2
ρ_1	1	1	1	1	1
ρ_4	4	1	0	-1	-1
ρ_5	5	-1	1	0	0
ρ_6	6	0	-2	1	1

On voit que

$$(\chi_{\rho_1}|\chi_{\rho_1}) = 1, \quad (\chi_{\rho_4}|\chi_{\rho_4}) = 1, \quad (\chi_{\rho_5}|\chi_{\rho_5}) = 1, \quad (\chi_{\rho_6}|\chi_{\rho_6}) = 2.$$

Donc ρ_1, ρ_4, ρ_5 sont irréductibles et $\wedge^2(\rho_4) = \rho_6 = \rho_3 \oplus \rho'_3$ avec $(\dim \rho_3)^2 + (\dim \rho'_3)^2 + 1 + 16 + 25 = 60$, donc

$$\dim \rho_3 = \dim \rho'_3 = 3.$$

6. Soient $(3, A, B, C, D)$ et $(3, A', B', C', D')$ les deux dernières lignes de la table des caractères. En utilisant l'orthogonalité des colonnes et des lignes, on obtient $A = A' = 0, B = B' = -1, C + D = 1, C' + D' = 1, C'^2 - D'^2 = 0$. Comme $D' = -C$ est impossible, on a $D' = C$ et $C' = D$, d'où $C^2 - C - 1 = 0$. On peut choisir $C = \tau$ et alors $C' = \tau - 1, D = 1 - \tau, D' = \tau$. Si l'on avait choisi $C = 1 - \tau$, on aurait seulement inversé les deux dernières lignes de la table des caractères.

7. D'où la table de caractères de \mathcal{A}_5 .

	1	20	15	12	12
	e	α	β	γ	γ^2
ρ_1	1	1	1	1	1
ρ_4	4	1	0	-1	-1
ρ_5	5	-1	1	0	0
ρ_3	3	0	-1	τ	$1 - \tau$
ρ'_3	3	0	-1	$1 - \tau$	τ

Troisième partie

8. Dans la projection $p : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$, l'élément $g_\alpha = \exp(2\alpha\xi_3)$ se projette sur la rotation, d'angle 2α ,

$$\mathcal{R}_{2\alpha} = \exp 2\alpha\eta_3 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que $\chi_{\mathcal{D}^j}(g_\alpha) = \sum_{m=-j}^j e^{2im\alpha}$, d'où

$$\chi_{\mathcal{D}^j}(\mathcal{R}_\theta) = \chi_{\mathcal{D}^j}(g_{\frac{\theta}{2}}) = \sum_{m=-j}^j e^{im\theta}.$$

9. On calcule $\chi^j(\theta) = \sum_{m=-j}^j e^{im\theta} = \frac{\sin(j + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$, pour $\theta \neq 0$.

On trouve $\chi^j(0) = 2j + 1$ et pour $\theta = \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$,

$$\chi^j\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{si } j \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 & \text{si } j \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\chi^j(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \equiv 0 \pmod{2} \\ -1 & \text{si } j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\chi^j\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \equiv 0 \pmod{5} \\ 2 \cos \frac{\pi}{5} = \tau & \text{si } j \equiv 1 \pmod{5} \\ 0 & \text{si } j \equiv 2 \pmod{5} \\ -2 \cos \frac{\pi}{5} = -\tau & \text{si } j \equiv 3 \pmod{5} \\ -1 & \text{si } j \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\chi^j \left(\frac{4\pi}{5} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \equiv 0 \pmod{5} \\ 1 - \tau & \text{si } j \equiv 1 \pmod{5} \\ 0 & \text{si } j \equiv 2 \pmod{5} \\ \tau - 1 & \text{si } j \equiv 3 \pmod{5} \\ -1 & \text{si } j \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Il est donc clair que, pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$ et toute rotation $g \in \mathcal{I}$, différente de l'identité,

$$\chi^{j+30\ell}(g) = \chi^j(g).$$

On peut établir la table des caractères χ^j , pour $0 \leq j \leq 29$. Écrivons les premières lignes

	j	1 0	20 $\frac{2\pi}{3}$	15 π	12 $\frac{2\pi}{5}$	12 $\frac{4\pi}{5}$	
R^0	0	1	1	1	1	1	χ^0
R^1	1	3	0	-1	τ	$1 - \tau$	χ^1
R^2	2	5	-1	1	0	0	χ^2
R^3	3	7	1	-1	$-\tau$	$\tau - 1$	χ^3
R^4	4	9	0	1	-1	-1	χ^4
R^5	5	11	-1	-1	1	1	χ^5
R^6	6	13	1	1	τ	$1 - \tau$	χ^6
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

10. On voit immédiatement que $R^0 = \rho_1$ (la représentation triviale), $R^1 = \rho_3$, $R^2 = \rho_5$ et sont donc irréductibles. Désignons par $\chi_1, \chi_3, \chi_{3'}, \chi_4, \chi_5$ les caractères de $\rho_1, \rho_3, \rho_3', \rho_4, \rho_5$. On a

$$(\chi^3 | \chi_1) = 0, (\chi^3 | \chi_3) = 0, (\chi^3 | \chi_{3'}) = 1, (\chi^3 | \chi_4) = 1, (\chi^3 | \chi_5) = 0.$$

Donc $R^3 = \rho_3' \oplus \rho_4$.

Posons, pour $m = 1, 3, 3', 4, 5$.

$$(\chi^j | \chi_m) = \frac{1}{60}((2j+1)\underline{m} + A_m^j),$$

où $\underline{m} = m$ pour $m = 1, 3, 4, 5$ et $\underline{m} = 3$ pour $m = 3'$. Alors

$$\begin{aligned} (\chi^{30\ell+j} | \chi_m) &= \frac{1}{60}((2j+1+60\ell)\underline{m} + A_m^j) \\ &= \ell \underline{m} + (\chi^j | \chi_m). \end{aligned}$$

Donc si $(\chi^j | \chi_m) = (\alpha_1^j, \alpha_3^j, \alpha_{3'}^j, \alpha_4^j, \alpha_5^j)$, alors

$$(\chi^{30\ell+3} | \chi_m) = (a_1^j + \ell, a_3^j + 3\ell, a_{3'}^j + 3\ell, a_4^j + 4\ell, a_5^j + 5\ell).$$

En particulier

$$(\chi^{30\ell+j}|\chi_m) = (\ell, 3\ell, 3\ell + 1, 4\ell + 1, 5\ell) ,$$

d'où

$$R^{30\ell+3} = \ell\rho_1 \oplus 3\ell\rho_3 \oplus (3\ell + 1)\rho'_3 \oplus (4\ell + 1)\rho_4 \oplus 5\ell\rho_5 .$$

On vérifie que $2(30\ell + 3) + 1 = \ell + 9\ell + 9\ell + 3 + 16\ell + 4 + 25\ell$.

11. Pour décomposer $R^2 \otimes R^3$, on peut utiliser

$$\mathcal{D}^2 \otimes \mathcal{D}^3 = \mathcal{D}^1 \oplus \mathcal{D}^2 \oplus \mathcal{D}^3 \oplus \mathcal{D}^4 \oplus \mathcal{D}^5$$

qui entraîne la même relation entre les $\underline{\mathcal{D}}^j$ et donc entre les R^j .

Les décompositions de R^4 et de R^5 sont

$$R^4 = \rho_4 \oplus \rho_5 \quad , \quad R^5 = \rho_3 \oplus \rho'_3 \oplus \rho_5 .$$

D'où

$$R^2 \otimes R^3 = 2\rho_3 \oplus 2\rho'_3 \oplus 2\rho_4 \oplus 3\rho_5 .$$

On vérifie que $5 \times 7 = 6 + 6 + 8 + 15$.

On peut aussi écrire

$$R^2 \otimes R^3 = \rho_5 \otimes (\rho'_3 \oplus \rho_4) = (\rho_5 \otimes \rho'_3) \oplus (\rho_5 \otimes \rho_4) .$$

Le caractère de $\rho_5 \otimes \rho'_3$ est $(15, 0, -1, 0, 0)$, donc

$$\rho_5 \otimes \rho'_3 = \rho_3 \oplus \rho'_3 \oplus \rho_4 \oplus \rho_5 .$$

Le caractère de $\rho_5 \otimes \rho_4$ est $(20, -1, 0, 0, 0)$, donc

$$\rho_5 \otimes \rho_4 = \rho_3 \oplus \rho'_3 \oplus \rho_4 \oplus 2\rho_5 .$$

On retrouve bien

$$R^2 \otimes R^3 = 2\rho_3 \oplus 2\rho'_3 \oplus 2\rho_4 \oplus 3\rho_5 .$$

Épilogue : Représentations de $G = p^{-1}(\mathcal{I}) \subset \text{SU}(2)$.

Chaque classe de conjugaison a un représentant $g_\alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi$.

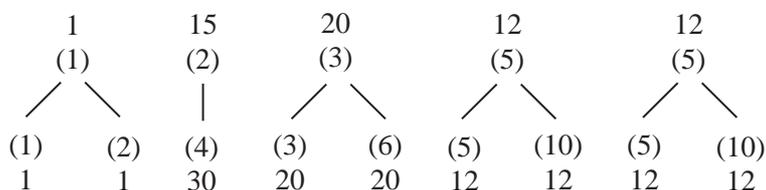
ordre	1	2	4	6	3	10	10	5	5
cardinal	1	1	30	20	20	12	12	12	12
α	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$

La classe de $e, \theta = 0$, d'ordre 1, donne $\alpha = 0$ (ordre 1) et $\alpha = \pi$ (ordre 2).

La classe à 15 éléments, $\theta = \pi$, d'ordre 2, donne une classe à 30 éléments d'ordre 4, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

La classe à 20 éléments, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, d'ordre 3, donne une classe à 20 éléments d'ordre 3, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ et une classe à 20 éléments d'ordre 6, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Chaque classe à 12 éléments, $\theta = \frac{2\pi}{5}$ (resp., $\theta = \frac{4\pi}{5}$), d'ordre 5, donne une classe à 12 éléments d'ordre 5, $\alpha = \frac{6\pi}{5}$ (resp., $\alpha = \frac{2\pi}{5}$) et une classe à 12 éléments d'ordre 10, $\alpha = \frac{\pi}{5}$ (resp., $\alpha = \frac{7\pi}{5}$).



On peut écrire aussitôt les caractères des représentations $\rho_1, \rho_3, \rho'_3, \rho_4, \rho_5$.

Il y a aussi, pour $j = \frac{1}{2}$, ρ_2 obtenue par restriction de $\mathcal{D}^{1/2}$ et ρ'_2 . Les représentations $\rho_1, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ sont les restrictions de $\mathcal{D}^0, \mathcal{D}^1, \mathcal{D}^{3/2}, \mathcal{D}^2$.

D'où la table des caractères.

	ordre	1	2	4	6	3	10	10	5	5
	cardinal	1	1	30	20	20	12	12	12	12
		0	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$
\mathcal{D}^0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{D}^{1/2}$	2	2	-2	0	1	-1	τ	$1 - \tau$	$-\tau$	$\tau - 1$
\mathcal{D}^1	3	3	3	-1	0	0	τ	$1 - \tau$	τ	$1 - \tau$
$\mathcal{D}^{3/2}$	4	4	-4	0	-1	1	1	1	-1	-1
\mathcal{D}^2	5	5	5	1	-1	-1	0	0	0	0
$\mathcal{D}^{5/2}$	6	6	-6	0	0	0	-1	-1	1	1
	4'	4	4	0	1	1	-1	-1	-1	-1
	3'	3	3	-1	0	0	$1 - \tau$	τ	$\tau - 1$	τ
	2'	2	-2	0	1	-1	$1 - \tau$	τ	$\tau - 1$	$-\tau$

Les 6 premières lignes sont des caractères irréductibles, comme le montre le calcul des carrés scalaires. On a pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \otimes \mathbf{k} &= (\mathbf{k} - \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{k} + \mathbf{1}) \quad (\mathcal{D}^{1/2} \otimes \mathcal{D}^j = \mathcal{D}^{j-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{D}^{j+\frac{1}{2}}, j \geq \frac{1}{2}), \\ \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}' &= \mathbf{4}', \\ \mathbf{2} \otimes \mathbf{3}' &= \mathbf{6}' = \mathbf{2}' \otimes \mathbf{3}, \\ \mathbf{2} \otimes \mathbf{4}' &= \mathbf{2}' \oplus \mathbf{6}. \end{aligned}$$

On peut montrer que

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} &= \mathbf{2}^{\otimes 2} \\ \mathbf{4} \oplus \mathbf{2}\mathbf{2} &= \mathbf{2}^{\otimes 3} \\ \mathbf{5} \oplus \mathbf{3}\mathbf{2}^{\otimes 2} &= \mathbf{2}^{\otimes 4} \otimes \mathbf{1} \\ \mathbf{6} \oplus \mathbf{4}\mathbf{2}^{\otimes 3} &= \mathbf{2}^{\otimes 5} \otimes \mathbf{3}\mathbf{2} \end{aligned}$$

et de même $\mathbf{4}'$, $\mathbf{3}'$, $\mathbf{2}'$ s'expriment comme combinaisons linéaires de puissances tensorielles de $\mathbf{2}$.

Les multiplicités $a_{k,r}$ des représentations $r = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{2}'$ dans la restriction à G des représentations $\mathcal{D}^{k/2}$, $k \in \mathbb{N}$, sont les coefficients du développement en série d'une fraction rationnelle, dont le numérateur seul dépend de r .

Référence : F. R. K. Chung, B. Kostant, S. Sternberg, Groups and the Buckyball, in *Lie Theory and Geometry*, J. L. Brylinski *et al.*, eds., Birkhäuser 1994.

Bibliographie

- [Barut-Ra zka] A. O. Barut, R. Ra zka, *Theory of Group Representations and Applications*, Polish Scientific Publishers 1977. Deuxième  dition, World Scientific, 1986.
- [Basdevant-Dalibard] J.-L. Basdevant, J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Les  ditions de l' cole polytechnique, 2001.
- [Blaizot-Tolédano] J.-P. Blaizot, J.-C. Tolédano, *Symétries et physique microscopique*, Ellipses, 1997.
- [Broué] M. Broué, *Groupes et Représentations : une introduction*, Cours de Majeure de Physique, Mineure de Mathématiques,  cole polytechnique, 1994 (polycopié).
- [Fulton-Harris] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Springer, 1991.
- [Guichardet] A. Guichardet, *Groupes de Lie, Représentations*, Majeure de Mathématiques,  cole polytechnique, 2000 (polycopié).
- [Knapp] A. Knapp, *Lie Groups, beyond an introduction*, Birkhäuser, 1996, Chap. I.9.
- [Ludwig-Falter] W. Ludwig, C. Falter, *Symmetries in Physics*, deuxième  dition, Springer, 1996.
- [Marsden-Ratiu] J. E. Marsden, T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, deuxième  dition, Springer, 1999, Chapitre 9.
- [Naimark- stern] M. A. Naimark, A. I.  stern, *Theory of Group Representations*, Springer, 1982.
- [Rauch] G. Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*, Ellipses, 2000.
- [Rossmann] W. Rossmann, *Lie Groups, An Introduction Through Linear Groups*, Oxford University Press, 2002.
- [Roug ] A. Roug , *Introduction à la physique subatomique*, tomes 1 et 2, Les  ditions de l' cole polytechnique, 2000.
- [Sattinger-Weaver] D. H. Sattinger, O. L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*, Springer, 1986.
- [Serre] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Coll. Méthodes, Hermann, 1967, Partie I.
- [Simon] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, Amer. Math. Soc., 1995 (Graduate Studies in Mathematics 10).
- [Sternberg] S. Sternberg, *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, 1994.

Index

- action de groupe, 13
- algèbre de Lie, 49
- antiquark, 107
- application exponentielle, 52, 73
- automorphisme
 - d'algèbre de Lie, 51
 - de groupe, 10
 - intérieur, 10
- baryon, 104
- base standard, 81
- caractère, 22, 44
 - irréductible, 24
- centre
 - d'un groupe, 10
 - d'une algèbre de Lie, 50
- classe
 - à droite, 9
 - à gauche, 9
 - de conjugaison, 13, 29
- coefficient
 - d'une représentation, 40
 - matriciel, 21, 40
- composante connexe, 60
- composante isotypique, 19, 25
- conjugaison, 10
- constantes de structure, 51
- critère d'irréductibilité, 26
- crochet de Lie, 49
- différentielle d'une représentation, 63
- dimension d'une représentation, 17, 40
- eightfold way, 104
- espace de Hilbert séparable, 39
- fibré vectoriel, 31
- fonction
 - centrale, 22, 28
 - modulaire, 39
- forme réelle, 51
- formule de Clebsch-Gordan, 88
- fullerènes, 127
- générateur infinitésimal, 56
- groupe
 - abélien, 9
 - alterné, 10
 - cristallographique, 11
 - cyclique, 9, 10
 - de Lie, 12, 56
 - complexe, 12
 - linéaire, 12, 56
 - diédral, 11
 - linéaire, 11
 - orthogonal, 11
 - spécial linéaire, 11
 - spécial orthogonal, 11, 72
 - spécial unitaire, 12, 74
 - symétrique, 10
 - symplectique, 57
 - topologique, 12
 - unimodulaire, 39
 - unitaire, 12
- hadron, 107
- identité de Jacobi, 49
- idéal, 50
- indice, 10
- isomorphisme
 - d'algèbres de Lie, 51
 - de groupes, 10
- lemme de Schur, 21, 42
- matrices de Pauli, 69

- méson, 104
- mesure de Haar, 39
- moment cinétique, 83
- morphisme
 - d'algèbres de Lie, 51
 - de groupes, 10
 - de Lie, 61
- multiplicité, 19, 25, 100
- octet, 104
- opérateur
 - borné, 37
 - d'entrelacement, 19, 41, 85
 - de Casimir, 82
 - de projection, 30
 - hermitien, 82
 - unitaire, 40
- orbite, 13
- ordre
 - d'un groupe fini, 9
 - d'un élément, 9
- poids, 95
 - maximal, 97–99
- produit
 - direct, 10
 - scalaire, 21, 43
 - semi-direct, 14
 - tensoriel, 22
 - hilbertien, 42
- quark, 107
- quaternions, 71, 75
- racine, 93, 94
- relations
 - d'orthogonalité, 44
 - de commutation, 51
- représentation
 - D^j , 81
 - adjointe, 64
 - complètement réductible, 19, 41
 - continue, 40
 - contragrédiente, 33, 96
 - d'algèbre de Lie, 51
 - de groupe, 17
 - fondamentale, 95
 - induite, 31
 - irréductible, 18, 41
 - matricielle, 17
 - orthogonale, 40
 - régulière, 26
 - semi-simple, 41
 - standard, 95
 - triviale, 17
 - unitaire, 18, 40
 - unitarisable, 18, 43
- représentations équivalentes, 20, 41
- revêtement, 76
- rotation, 72
- section, 31
- somme directe, 19
 - hilbertienne, 41
- sous-algèbre de Lie, 50
- sous-espace vectoriel invariant, 18
- sous-groupe
 - à un paramètre, 55
 - distingué, 10
 - invariant, 10
 - normal, 10
- sous-représentation, 18, 41
- symétrie, 11, 93, 104, 107
- table de caractères, 25
- théorème
 - de Lagrange, 9
 - de Maschke, 19
- translation, 13
- vecteur poids, 97
 - maximal, 97–99
- voie octuple, 104



ÉDITION 2003

Achevé d'imprimer le 25 septembre 2003 sur les presses
de l'imprimerie de l'École polytechnique.



Dépôt légal : 3^e trimestre 2003
N° ISBN 2 – 7302 – 1060 – 1

IMPRIMÉ EN FRANCE