TRISECTION DE L'ANGLE
à la règle et au compas.

Jean Jacquelin

1. INTRODUCTION :

De nos jours, il peut paraître étonnant que certains espèrent encore trouver du nouveau au sujet de la fameuse et antique trilogie de problèmes géométriques : la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle, ceci dans le contexte des constructions dites "à la règle et au compas". Pourtant, il ne manque pas d'écrits récents affirmant qu'une réponse satisfaisante a été donnée à ces questions, posées près de 2000 ans plus tôt : L'impossibilité de ces constructions est prouvée, sauf dans des cas particuliers bien expliqués.

Les preuves de ces impossibilités sont loin d'être triviales. S'il en avait été autrement, il n'aurait pas fallu deux millénaires pour surmonter la difficulté. Ce serait une fameuse gageure à relever que d'exposer les preuves en quelques pages seulement, dans un article didactique et accessible à un large public. Je suis certain que si un auteur audacieux et avisé relevait le défi, il trouverait un accueil enthousiaste de la part d'un grand nombre de lecteurs.

Le but du présent papier est beaucoup plus modeste. A l'opposé d'une démonstration d'impossibilité, il s'agit d'un survol de ce qui est possible, impliquant immanquablement des entorses aux règles de construction "à la règle et au compas" édictées par les Grecs Anciens. Il n'est pas non plus question de réaliser une revue exhaustive de soi-disant solutions proposées tout au long des siècles passés. Un bibliothèque n'y suffirait probablement pas, pour rassembler les documents sérieux et plus encore, l'immensité des élucubrations. Le terme de survol est même excessif, puisque seulement un petit nombre d'exemples, typiques et choisis parmi les plus simples, prétend donner un aperçu éclectique de différentes catégories de solutions proposées. Et encore plus restreinte, notre investigation ne portera que sur le problème antique de la trisection de l'angle.

Nombre d'auteurs, peu pointilleux, se contentent de vérifications graphiques pour montrer que leur construction divise bien en trois parties égales l'angle donné, ceci à l'épaisseur près du trait de crayon. Ils n'ont pas pris conscience du peu d'intérêt de leur travail, dans la mesure où sont déjà connues de longue date des méthodes graphiques (de principe très simple) qui peuvent donner des résultats aussi précis que l'on veut : Ce sont des résultats largement satisfaisants du point de vue pratique. Mais pas satisfaisants du point de vue théorique : ce ne sont jamais que des résultats approchés, même si l'écart est indiscernable sur le dessin. Une méthode typique est la dichotomie, qui sera exposée au §.2. Les amateurs de constructions approximatives pourront comparer leurs trouvailles avec quelques exemples élémentaires décrits dans les §.3 et 4, ceci des points de vues simplicité de la méthode et précision des résultats.

Mais la preuve d'une division correcte par trois ne peut pas se contenter de vérifications graphiques. Il est indispensable de recourir à des démonstrations géométriques et/ou analytiques. L'affaire devient plus sérieuse. On entre alors dans le domaine des constructions géométriquement exactes et qui semblent apporter une solution mathématiquement correcte au problème de la trisection! Bien sûr, il y a toujours quelque chose qui cloche, plus ou moins difficile à mettre en lumière. Cela sera illustré par un exemple très simple à tirer au clair, §.5.

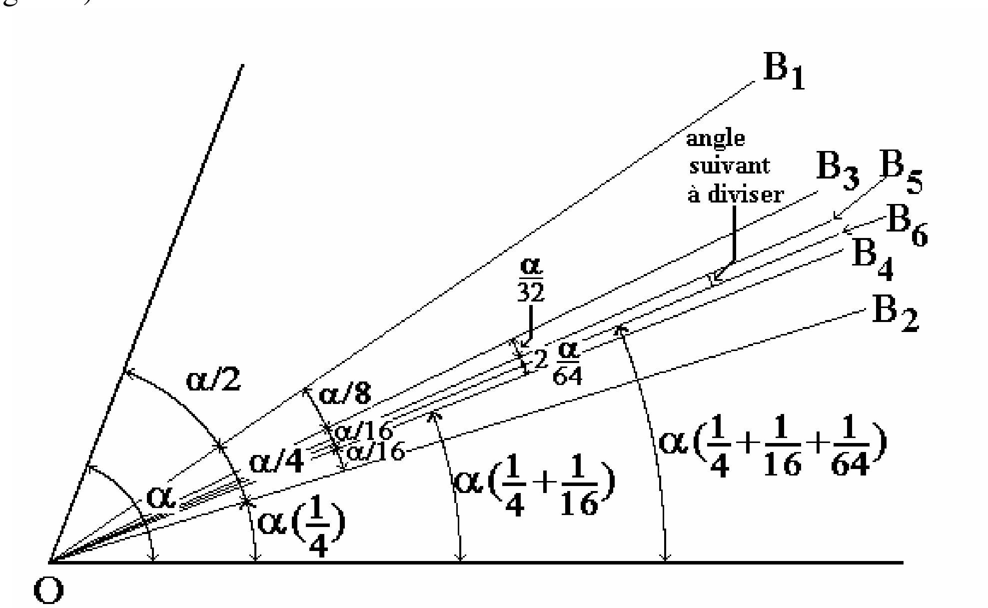
Il convient de prévenir que le contenu de cet article ne présente rien de vraiment original. Même si des méthodes décrites ici diffèrent un peu de certaines connues depuis longtemps, les variantes sont évidentes à tout esprit un tant soit peu imaginatif . Néanmoins, j'espère que cela pourra être matière à réflexion pour les personnes peu au courant, mais néanmoins intéressées par ces vieux problèmes.

2. CONSTRUCTION DICHOTOMIQUE :

D'une façon générale, les procédés par dichotomie, c'est-à-dire mettant en œuvre des divisions successives par deux, sont intimement liés à la numération binaire. Il en a déjà été tiré parti dans un article : "Tracé d'un angle quelconque à la règle et au compas", publié dans le magazine Quadrature n°52, p.4. Le cas présent est encore plus simple. On y met en application la série géométrique suivante :

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$$

Bien entendu, la série ne sera pas infinie, mais limitée au nombre de termes que l'on voudra, ce qui permet d'approcher 1/3 avec autant de précision qu'on le souhaite. En pratique, la procédure est la suivante (figure 1) :

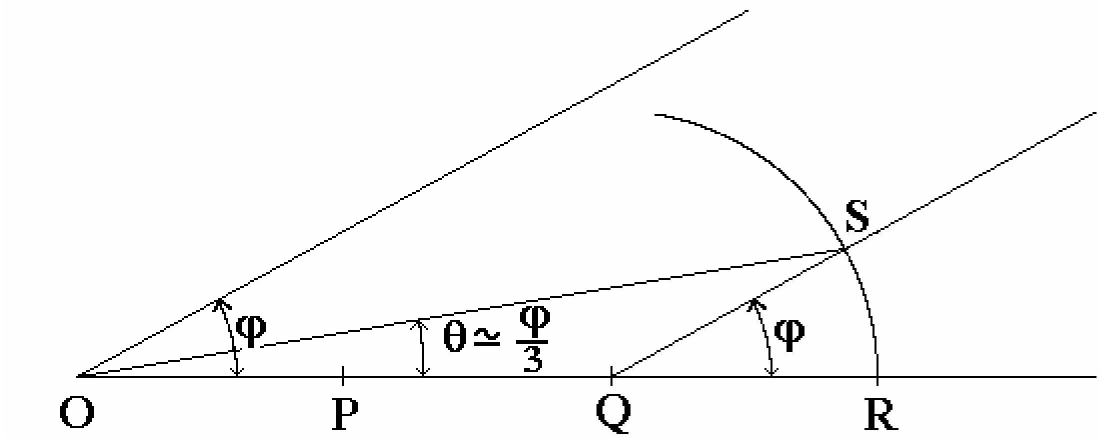


- L'angle α étant donné, on le partage en (1/2) et deux fois(1/4) en traçant les bissectrices B_1 puis B_2.
- L'angle formé par B_1 et B_2 vaut également $\alpha/4$. Cet angle est partagé de la même façon en (1/2) et deux fois(1/4) en traçant les bissectrices B_3 puis B_4. On obtient ainsi un angle égal à $\alpha/16$ qui s'ajoute au précédent $\alpha/4$.
- L'angle formé par B_3 et B_4 vaut $\alpha/16$. Toujours de la même façon, on le partage en (1/2) et deux fois(1/4) en traçant les bissectrices B_5 puis B_6. On obtient ainsi un angle égal à $\alpha/64$ qui s'ajoute au précédents $\alpha/4$ et $\alpha/16$.
- Et ainsi de suite, pour autant que l'on veuille améliorer la précision. En fait, il n'y a pas à aller très loin pour atteindre une limitation graphique : l'angle restant à diviser se confond avec l'épaisseur d'un trait. On obtient ainsi la représentation graphique de $\alpha/3$ avec le maximum de précision matériellement possible. (Sur la figure 1, les bissectrices B_7 et B_8 ne sont pas tracées pour conserver une lisibilité suffisante).

Le processus pouvant, si nécessaire, être poursuivi aussi loin que l'on veut, les amateurs de trisections ne peuvent pas revendiquer, pour les constructions qu'ils proposent, une précision supérieure à celle de la méthode qui vient d'être décrite. Tout au plus peuvent-ils espérer obtenir un aussi bon résultat par un plus petit nombre de manipulations des instruments et avec moins de tracés. De surcroît, si l'on considère comme avantage notoire la facilité à mémoriser la procédure que nous avons vue, il est douteux que l'on puisse en trouver une autre qui la surpasse.

3. CONSTRUCTION POUR DE PETITS ANGLES :

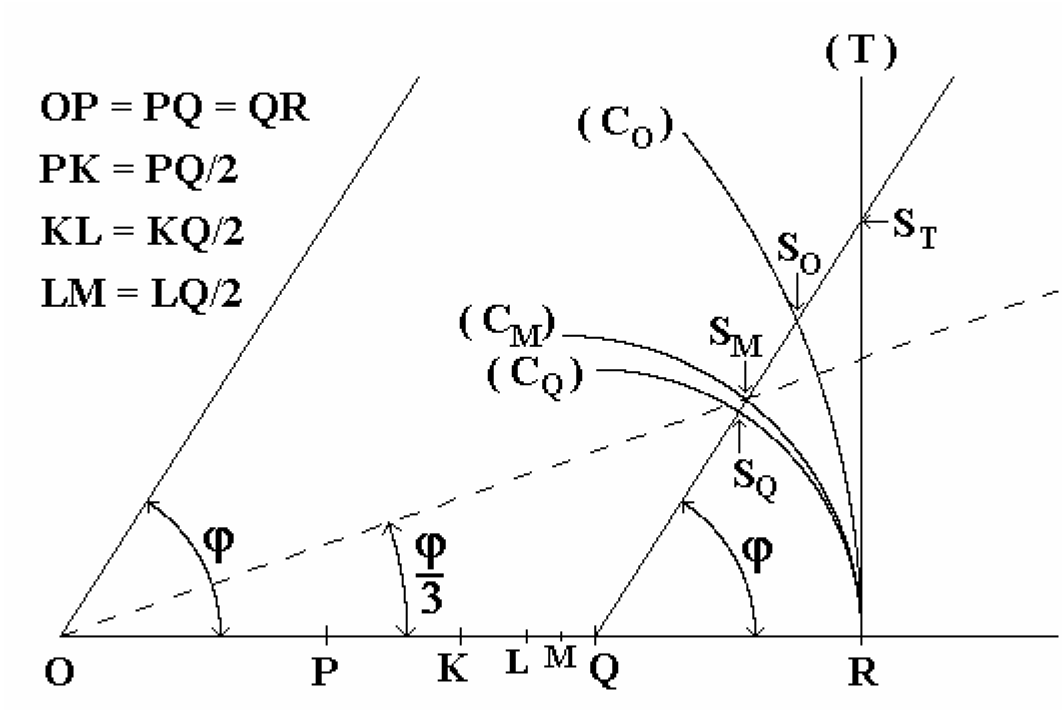
La construction est représentée figure 2 :



L'angle φ étant donné, on porte sur l'un de ses cotés les points P, Q et R tels que OP=PQ=QR, de longueur arbitraire. On construit la parallèle à l'autre coté de l'angle, passant par Q. Elle coupe le cercle de centre Q et de rayon QR au point S. L'angle θ, défini par OR et OS, est approximativement égal à φ/3. La valeur exacte de θ est :

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}\right) \quad = \frac{\varphi}{3} - \frac{1}{81}\varphi^3 - \frac{1}{972}\varphi^5 + O\left(\varphi^7\right)$$

Dans ces formules, les angles φ et θ sont exprimés en radians.
L'écart $\delta = |\varphi/3 - \theta|$ est d'autant plus faible que φ est petit. Les écarts maximum sont les suivants : Si $\varphi<62°$: $\delta<1°$; si $\varphi<29°$: $\delta<0{,}1°$ et si $\varphi<13°$: $\delta<0{,}01°$
On ne peut pas rêver d'une construction plus simple. Par contre, elle n'est satisfaisante, du point de vue de la précision graphique, que pour des angles assez petits, ce qui nuit à son intérêt dans le cas général.
Nous verrons, §.4 , que diverses variantes assez évidentes permettent d'étendre cette construction aux grands angles.
Remarque : la construction que nous venons de décrire est susceptible de modifications mineures, telles que, par exemple, celles présentées sur la figure 3 :



L'angle φ a été choisi intentionnellement trop grand de façon à exagérer les différences et rendre le dessin plus lisible. (Pour des angles φ plus petits, tels qu'indiqués dans la table suivante, les demi-droites OS_T, OS_O, OS_M et OS_Q seraient presque confondues, à l'épaisseur près du trait de crayon).
Le point S peut être pris à l'intersection de (D) avec :
- soit la perpendiculaire (T) à OR en R , ce qui est une variante d'usage courant.
- soit le cercle (C_O) de centre O et de rayon OR
- soit le cercle (C_Q) de centre Q et de rayon QR , celle que nous utiliserons.
- soit le cercle (C_M) de centre M et de rayon MR

Les résultats sont comparés dans le tableau suivant :

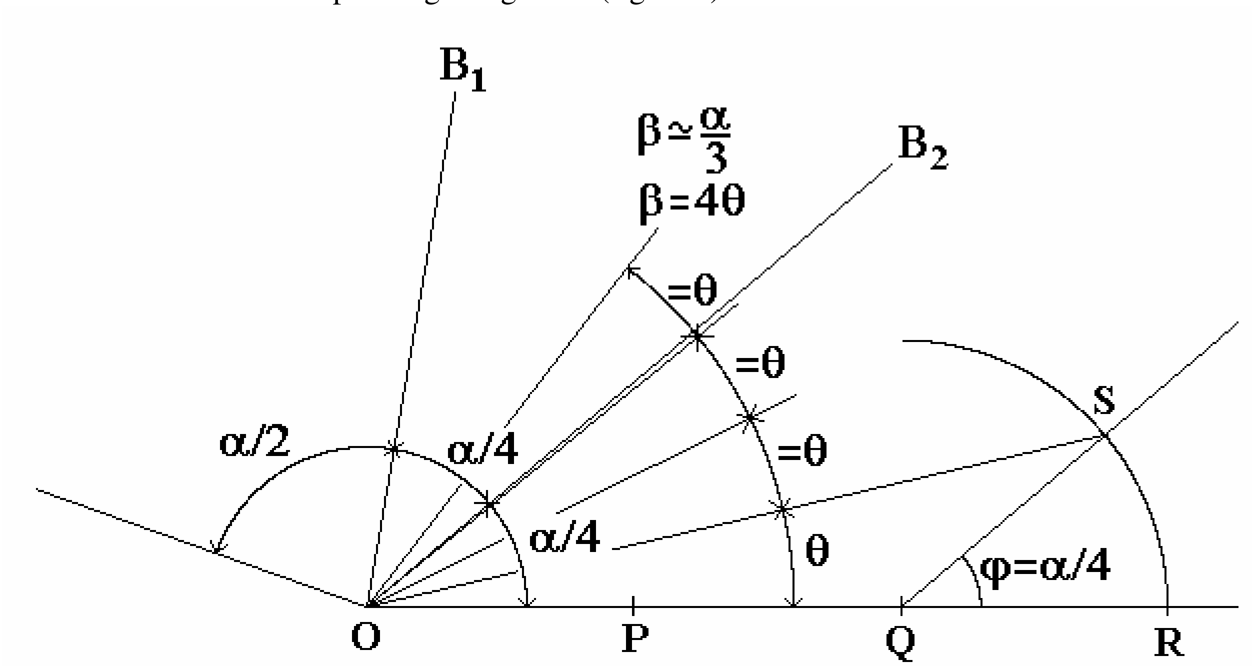
Variantes de constructions :	φ maximum tel que l'écart soit :			Développements en série : (φ et θ en radian)
	δ < 1°	δ < 0,1°	δ < 0,01°	
Perpendiculaire (T)	φ < 31°	φ < 14°	φ < 7°	$\theta=\frac{\varphi}{3}+\frac{8}{81}\varphi^3+\frac{8}{243}\varphi^5+O\left(\varphi^7\right)$
Cercle (C_O)	φ < 36°	φ < 17°	φ < 8°	$\theta=\frac{\varphi}{3}+\frac{5}{81}\varphi^3+\frac{1}{108}\varphi^5+O\left(\varphi^7\right)$
Cercle (C_Q)	φ < 62°	φ < 29°	φ < 13°	$\theta=\frac{\varphi}{3}-\frac{1}{81}\varphi^3-\frac{1}{972}\varphi^5+O\left(\varphi^7\right)$
Cercle (C_M)	φ < 93°	φ < 60°	φ < 38°	$\theta=\frac{\varphi}{3}+\ 0\ -\frac{1}{6561}\varphi^5+O\left(\varphi^7\right)$

On voit que, du point de vue de la précision, la méthode correspondant à (C_M) est nettement la meilleure. Par contre, elle nécessite la construction du point M de telle sorte que MQ=PQ/8, par tracés successifs de médiatrices : La médiatrice de PQ, donnant son milieu K, puis celle de KQ, donnant L et enfin celle de LQ. Cela fait beaucoup de manipulations supplémentaires des instruments. Nous verrons (§.4) que d'autres possibilités existent pour améliorer spectaculairement la précision, au prix de peu de complication, dans le cas d'un grand angle à diviser. C'est la raison pour laquelle la construction correspondant (C_Q), c'est-à-dire celle représentée figure 2, simple et suffisamment précise, sera préférée pour la suite.

4. CONSTRUCTIONS POUR DE GRANDS ANGLES :

4.1. Approche par division, puis multiplication :

Bien que l'on ne sache pas diviser un angle en trois exactement, par contre, le multiplier par trois, ou par n'importe quel entier, est élémentaire. De cette banalité, l'idée de la variante de construction suivante n'est pas longue à germer (figure 4) :



L'angle α étant donné, on trace les bissectrices successives B_1 et B_2. Ceci ramène à la figure 2 avec $\varphi=\alpha/4$. On se donne OP arbitraire et Q, R tels que OP=PQ=QR. La parallèle à B_2 passant par Q coupe le cercle de centre Q et de rayon QR en S. On obtient ainsi l'angle (ROS)=θ. Finalement, la construction de $\beta=4\theta$ donne une approximation de $\alpha/3$.

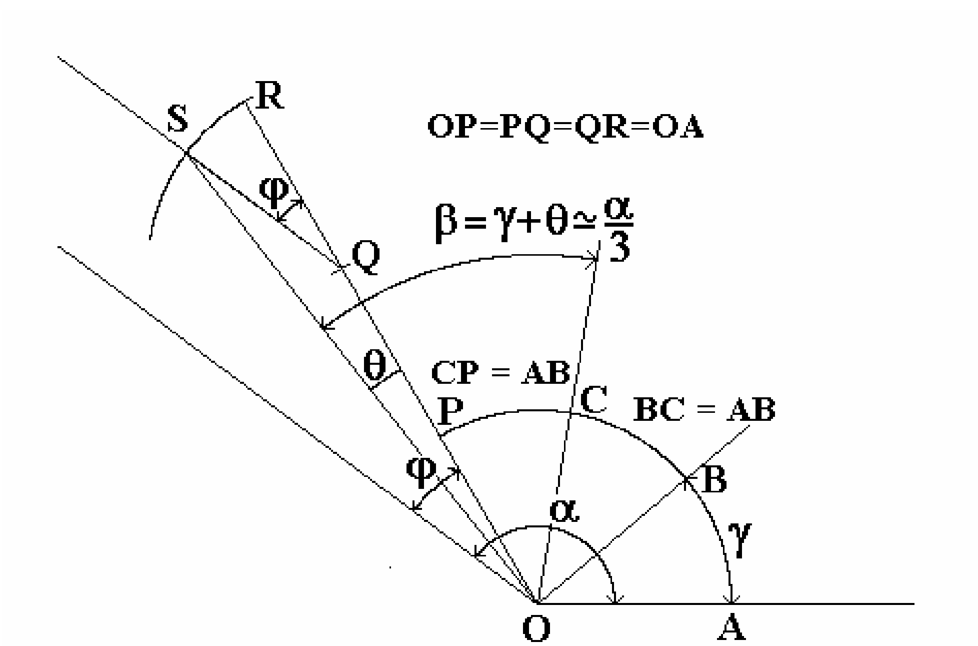
Les écarts $\delta = |\alpha/3 - \beta|$ maximum sont les suivants :

Si $\alpha<160°$: $\delta<1°$; si $\alpha<75°$: $\delta<0,1°$ et si $\alpha<35°$: $\delta<0,01°$

Bien évidemment, on peut augmenter la précision autant que l'on veut. Il suffit, par exemple, de tracer une bissectrice de plus au début pour que $\varphi=\alpha/8$ et $\beta=8\theta$. Les écarts δ diminuent rapidement : Dans ce cas, $\delta<0,3°$ quel que soit α ; si $\alpha<120°$: $\delta<0,1°$ et si $\alpha<55°$: $\delta<0,01°$

4.2. Approche par soustraction puis addition :

Cette approche différente, mais qui relève du même ordre d'idées que la précédente, est présentée en figure 5 :



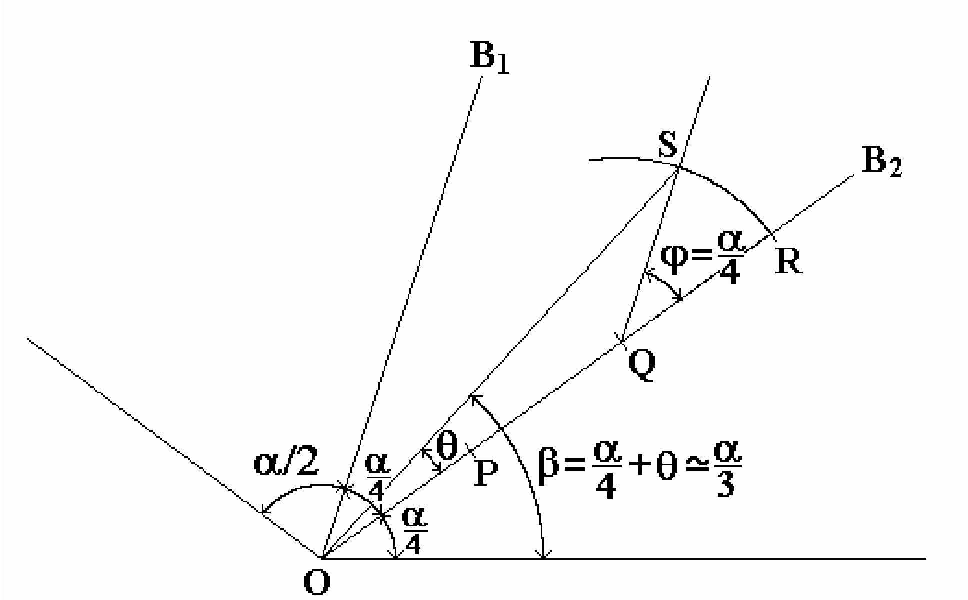
- L'angle α étant donné et pouvant être grand, on trace "à vue de nez" un angle γ, très grossièrement au tiers de α. Cet angle γ est presque arbitraire : il n'a nul besoin d'avoir une valeur particulière. On lui demande seulement que, multiplié par trois, il donne l'angle (3γ) pas trop différent de α.
(Pour tracer la figure, on a volontairement pris γ trop petit, de façon à avoir une lisibilité suffisante, soit φ assez grand, ce que l'on devrait normalement éviter de faire)
- Il suffit ensuite de diviser l'angle $\varphi=(\alpha-3\gamma)$ selon la méthode "des petits angles" vue au §.3, ce qui donne l'angle θ. Le résultat final, c'est à dire l'angle $\beta=\gamma+\theta$ est une approximation de $\alpha/3$ avec une précision aussi bonne que celle qui était obtenue précédemment dans le cas des petits angles.

Il est douteux que l'on puisse imaginer plus simple ! Néanmoins, si quelque esprit chagrin se plaignait de ne pas avoir "le compas dans l'œil" et de ne pas savoir comment tracer l'angle γ, il est aisé de donner satisfaction, ainsi que nous allons le voir.

4.3. Approche par dichotomie préalable :

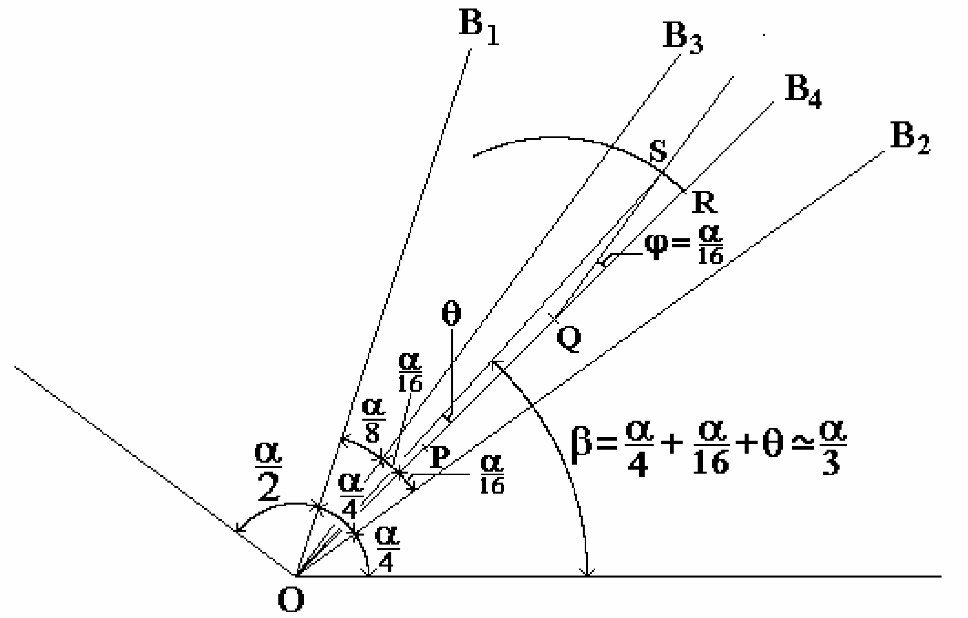
Pour systématiser la méthode précédente, on retourne à la dichotomie, §.2, mais en la limitant à ses toutes premières étapes. Cela revient à la terminer prématurément, d'une façon "propre", grâce à la construction "petit angle" susdite.

Le résultat est déjà intéressant en ne traçant que les bissectrices B_1 et B_2 qui partagent α en $\alpha/2$ et deux fois $\alpha/4$, puis en appliquant le procédé "petit angle" à ($\alpha/4$), ce qui est représenté en figure 6 :



Toutefois, la précision n'est pas excellente pour de grands angles, bien qu'acceptable dans la plupart des graphismes courants. Les écarts $\delta = |\alpha/3 - \beta|$ sont inférieurs aux valeurs suivantes :
Quel que soit α : $\delta<0{,}4°$; si $\alpha<118°$: $\delta<0{,}1°$ et si $\alpha<55°$: $\delta<0{,}01°$

Il ne coûte pas beaucoup de tracer les deux bissectrices de plus, B_3 et B_4, figure 7 :

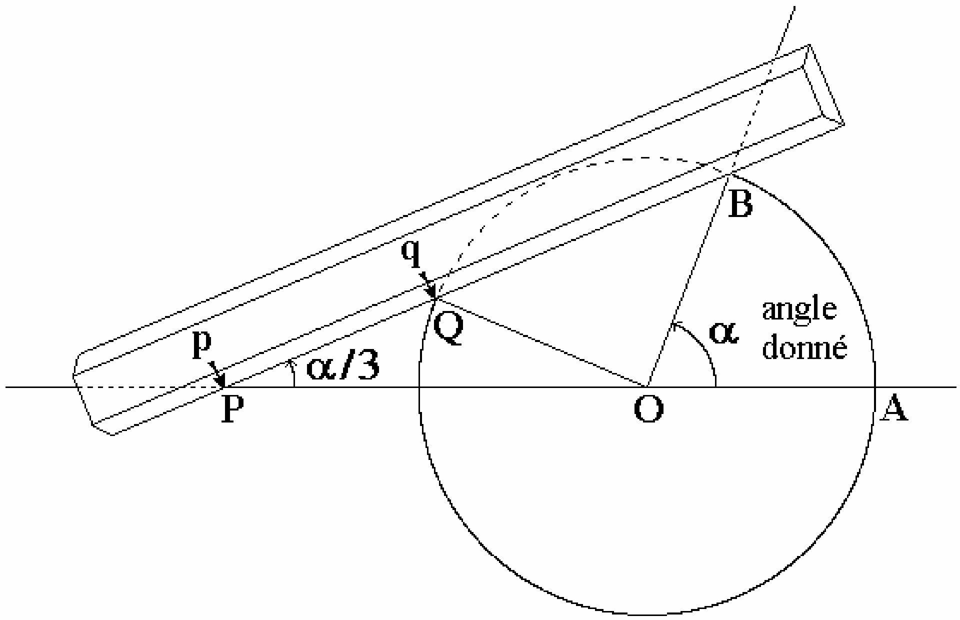


La précision devient excellente : quel que soit α, l'écart δ est inférieur à 0,006°. et si $\alpha<102°$: $\delta<0{,}001°$ (tout ceci en théorie, car l'épaisseur des traits masque une telle précision)

Nombreux sont les procédés de trisections approximatives qui ont été publiés, mettant en œuvre des idées du même genre, sous diverses formes et dont l'explication mathématique passe, de façon plus ou moins directe, par des séries limitées, comme les exemples précédents ont permis de l'observer. C'est intentionnellement qu'un petit nombre seulement de constructions ont été présentées ici : leur accumulation deviendrait vite rébarbative. Dans la littérature et sur la toile, on en trouve une pléthore de différentes sortes. Par exemple, une revue largement plus étendue que la présente est donnée à cette adresse : http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm

5. CONSTRUCTION EXACTE BIAISEE (NEUSIS) :

Une méthode célèbre est attribuée à Archimède : La dite construction est exacte dans le sens que, si les instruments étaient parfaits et la précision de tracé idéale, l'angle obtenu serait effectivement égal à $\alpha/3$ (l'angle donné étant α). La procédure est la suivante (figure 8) :



- Tracer un cercle de centre 0 et de rayon R quelconque. Il coupe en A et B les demi-droites données qui définissant l'angle α .
- En maintenant l'écartement du compas, marquer n'importe où sur la règle deux points p et q distants de R. Donc R = pq = OA = OB.
- Faire glisser la règle de telle sorte que le point p se déplace sur la droite qui porte OA et que l'arête de la règle passe sur le point B.
- On s'arrête lorsque le point q de la règle tombe exactement sur le cercle. Ainsi se trouvent déterminés les points P de la droite et Q du cercle, coïncidant respectivement avec p et q de la règle.
- On a obtenu l'angle (OPQ) = $\alpha/3$. Il est élémentaire de donner une preuve géométrique de cette égalité.

Voici donc l'angle divisé en trois, aussi parfaitement que les contingences matérielles le permettent. En tout cas, il est bel et bien divisé en trois de façon théoriquement exacte. L'antique problème de trisection serait-il donc résolu ? Et bien non. Les Grecs Anciens en étaient parfaitement conscients. En effet, l'une des sacro-saintes conventions a été transgressée : Il s'agit de l'interdiction de porter des marques ou des tracés sur la règle (Cet instrument étant avantageusement désigné par le mot "latte", pour distinguer d'une règle graduée, bien évidemment non permise).

Qu'à cela ne tienne, me direz-vous. Avec un peu de dextérité, je vais procéder ainsi :
Le compas conservant son écartement, je défini les point p et q , non pas par des marques sur la règle, mais tout simplement par les pointes du compas que je maintiens adroitement appliquées contre l'arête de la règle. A part cela, je procède de la même façon.
Objection : une autre convention est transgressée. Lorsqu'on déplace le compas, il doit aller se planter à un point fixe bien défini par un tracé antérieur. Ceci exclu toute manœuvre visant à trouver la position optimum de certains points (P et Q dans le cas présent) en déplaçant continûment le compas.

La construction que nous venons de voir (figure 8) se révèle donc être géométriquement exacte. Par contre, elle est biaisée relativement à la "construction à la règle et au compas" selon le sens traditionnel donné à cette expression.

6. CONCLUSION :

Parler de "trisection de l'angle à la règle et au compas" est un raccourci faisant oublier des conventions précises et restrictives qui définissent l'usage de ces instruments. Si ces règles ne sont qu'imparfaitement connues et si elles ne sont pas toutes respectées (volontairement ou non), il n'est pas difficile de trouver de nombreuses façons pour réaliser la trisection de l'angle. On a même attribué un qualificatif (*neusis*) à ces constructions biaisées, dont bon nombre sont décrites dans la littérature et sur la toile. Voir par exemple :
http://mathworld.wolfram.com/AngleTrisection.html
http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm

Ce qu'il y a de tire-bouchonnant dans les histoires de trisection d'angles, c'est que ceux que cela excite encore de nos jours, parfois n'ont même pas compris l'énoncé exact du problème, ou n'en ont pas une connaissance précise : Ils en restent à une question posée de façon vague, qu'ils connaissent approximativement par ouï-dire, contrairement à la définition rigoureuse de la "construction à la règle et au compas " au sens traditionnel.

Généralement, lorsqu'on parle du problème de la trisection d'un angle, on ne parle pas de trisection *approchée*, puisque de nombreuses méthodes, parfois très astucieuses, sont connues depuis longtemps. Le problème dont on parle est celui de la trisection *exacte* et *non biaisée* qui a bel et bien reçu une réponse définitive (cette réponse étant la preuve d'impossibilité dans le cas général, c'est-à-dire des angles quelconques et non pas de certains angles particuliers ayant des valeurs bien répertoriées).

Sans vouloir heurter les adeptes purs et durs de la "croyance en l'immaculée trisection", observons qu'il est difficile d'avoir une discussion saine et claire avec des personnes qui s'expriment le plus souvent avec autant d'approximations dans leur langage que dans leur démarche mathématique. Le plus souvent, cela dégénère en un dialogue de sourds. Certes, la preuve d'impossibilité de la trisection de l'angle, à la règle et au compas, demande un bon niveau de culture mathématique. Sans cette compétence, l'affirmation d'impossibilité peut être difficile à accepter et ressentie à tort comme un dogme dont on pourrait encore douter !

Les esprits vraiment terre-à-terre ne manqueront pas de faire remarquer que se restreindre à l'utilisation d'un compas et d'une règle non graduée, avec des conventions d'utilisation aussi strictes, c'est bien se compliquer la vie à plaisir, alors qu'un simple rapporteur ferait l'affaire, ou même des moyens un peu plus sophistiqués, trisecteurs, courbes trisectrices, etc... Il y aurait beaucoup à dire au sujet de ces autres moyens et instruments. Mais ce n'est pas ainsi que les penseurs de l'antiquité se sont posé des questions auxquelles il a fallu deux millénaires pour trouver les réponses. Ils avaient bien raison ces Anciens : le challenge a été un formidable stimulant pour faire progresser d'importants domaines des mathématiques. Dans la brève revue de méthodes présentée ici, ne nous étonnons pas de ce qu'il n'apparaisse rien de cette extraordinaire avancée : ce n'était ni l'objet de l'article, ni compatible avec son modeste niveau.