Université de Montpellier II

Agrégation de Mathématiques
(2005-2006)

Topologie, Analyse Fonctionnelle

Jérôme Droniou [1].

Exercice 1 Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme sup. On considère $U_n = \{g \in E \mid \forall t \in [0,1]\,,\ \exists s \in [0,1]\,,\ |g(t) - g(s)| > n|t-s|\}$. Montrer que U_n est un ouvert dense *(on pourra approcher toute fonction f régulière par une fonction qui oscille beaucoup)*. En déduire qu'il existe un G_δ dense dans E de fonctions nulle part dérivables.

Exercice 2 Soit $E = C([0,1])$, $K \in C([0,1]^2)$ et, pour $f \in E$, $s(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$. Montrer que $s : E \to E$ est linéaire continue et *compacte* (i.e. que s envoie la boule unité de E sur un ensemble relativement compact dans E).

Exercice 3 Soit $p \in]0,1[$ et E l'ensemble des (classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, de) fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurables telles que $\Delta(f) = \int_0^1 |f|^p < \infty$.

i) Montrer que E est un espace vectoriel et que $d(f,g) = \Delta(f-g)$ définit une distance sur E.

ii) Montrer que, pour cette distance (et la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$), les applications $(f,g) \in E \times E \to f + g \in E$ et $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E \to \lambda f$ sont continues. On dira alors que E est un *espace vectoriel topologique* (on a définit une topologie qui est compatible avec les structures d'espace vectoriel: somme interne et produit par un scalaire).

iii) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe $(g,h) \in E$ telles que $f = \frac{g+h}{2}$ et $\Delta(g) = \Delta(h) = 2^{p-1}\Delta(f)$ *(on pourra chercher g et h sous la forme $g = 2\mathbf{1}_{[0,a]}f$ et $h = 2\mathbf{1}_{]a,1]}f$).*

iv) Déduire de iii) qu'il n'existe pas d'ouvert convexe de E en dehors de $\emptyset$ et E.

v) Conclure alors qu'il n'y a pas de forme linéaire continue sur E en dehors de la forme linéaire nulle. En particulier, la topologie de E n'est pas normable (on ne peut mettre, sur E, une norme qui redonne la topologie de d).

Exercice 4 Soit E un Banach séparable et $(x_k)_{k\geq 1}$ une partie dense de E. On se donne des formes linéaires $l_n \in E'$ qui vérifient $||l_n|| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(l_{n_p})_{p\geq 1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$, $(l_{n_p}(x_k))_{p\geq 1}$ converge. En déduire que $(l_{n_p}(x))_{p\geq 1}$ converge pour tout $x \in E$, et qu'il existe donc $l \in E'$, $||l|| \leq 1$, telle que $l_{n_p}(x) \to l(x)$ pour tout $x \in E$ *("convergence simple", ou encore "faible-∗").*

Exercice 5 *(Théorème de Lax-Milgram)* Soit H un hilbert et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant: $\forall x \in H\,,\ a(x,x,) \geq \alpha||x||^2$ *(on dit que a est coercitive).* Montrer que, pour tout $l \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $a(u,v) = l(v)$ pour tout $v \in H$ *(on pourra commencer par représenter l par un $\tilde{l} \in H$, puis écrire $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ avec $A \in \mathcal{L}(H)$; ensuite, pour chercher u tel que $Au = \tilde{l}$, on pourra tenter d'appliquer un point fixe à $u \to u - \rho(Au - \tilde{l})$ pour un $\rho \in \mathbb{R}$ bien choisi...).*

[1] Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. email: `droniou@math.univ-montp2.fr`