On a donc bien la somme directe :

$$\ker(P(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)).$$

On conclut par récurrence sur p en considérant que si P_1 est premier avec $P_2, \cdots, P_p$ alors il est premier avec leur produit. ■

Remarque 2.8 *Dans le cas où $P(u) = 0$, on a $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker(P_k(u))$.*

2.6 Sous espaces caractéristiques

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique s'écrive :

$$P_u(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{N} - \{0\}$ et les λ_k deux à deux distincts. Le polynôme minimal de u s'écrit alors :

$$\pi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$$

avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.

Une telle écriture de P_u est assurée pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais pas nécessairement pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Dfinition 2.7 *Avec les notations qui précèdent, on appelle sous-espaces caractéristiques de u les sous espaces vectoriels $N_k = \ker(u - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$.*

Thorme 2.8 *Avec les notations qui précèdent, on a les résultats suivants.*

(i) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$.
Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$ on a :

(ii) $N_k = \ker(u - \lambda_k Id)^{\beta_k}$;

(iii) *λ_k est la seule valeur propre de la restriction de u à N_k ;*

(iv) $\dim(N_k) = \alpha_k$;

(v) *la restriction de $u - \lambda_k Id$ à N_k est nilpotente d'indice β_k.*

Dmonstration.

(i) De $P_u(u) = 0$ et du théorème de décomposition des noyaux on déduit que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$.

(ii) On pose, pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$, $M_k = \ker(u - \lambda_k Id)^{\beta_k}$ et on a :

$$M_k \subset N_k, \quad E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k = \bigoplus_{k=1}^{p} M_k,$$

donc :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \dim(M_k) \leq \dim(N_k), \\ n &= \sum_{k=1}^{p} \dim(N_k) = \sum_{k=1}^{p} \dim(M_k) \end{aligned}$$

et nécessairement $M_k = N_k$.

(iii) Soit λ une valeur propre de $u_{|N_k}$. C'est aussi une valeur propre de u, il existe donc $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$ tel que $\lambda = \lambda_j$ et un vecteur $x \in N_k - \{0\}$ tel que $(u - \lambda_j Id)(x) = 0$. On a alors $x \in N_k \cap N_j - \{0\}$ et nécessairement $j = k$ ($N_k \cap N_j = \{0\}$ si $j \neq k$).

(iv) Soit $d_k = \dim(N_k)$, pour $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$. De ce qui précède on déduit que le polynôme caractéristique de $u_{|N_k} \in \mathcal{L}(N_k)$ (N_k est stable par u) est $P_k(X) = (\lambda_k - X)^{d_k}$. De $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$, les N_k étant stables par u, on déduit que $P_u = \prod_{k=1}^{p} P_k$ et $d_k = \alpha_k$.

(v) Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$, on note :

$$v_k = (u - \lambda_k Id)_{|N_k} \in \mathcal{L}(N_k)$$

et on a $v_k^{\beta_k} = 0$ ($N_k = \ker(u - \lambda_k Id)^{\beta_k}$). Si, pour un $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$, $v_k^{\beta_k - 1} = 0$, alors le polynôme $(X - \lambda_k)^{\beta_k - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (X - \lambda_j)^{\beta_j}$ annule u puisqu'il annule tous les $u_{|N_j}$ et $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$, ce qui contredit le fait que $\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ est le polynôme minimal de u. On a donc $v_k^{\beta_k - 1} \neq 0$ et v_k est nilpotent d'indice β_k.

■

Du théorème précédent on va déduire que tout endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ se décompose de manière unique comme somme d'un endomorphisme diagonalisable (un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale) d et d'un endomorphisme nilpotent v avec d et v qui commutent.

Lemme 2.5 *Avec les notations qui précèdent, pour tout k compris entre 1 et p, le projecteur π_k de E sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} N_j$ est un polynôme en u.*

Dmonstration. Les polynômes $P_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (X - \lambda_j)^{\beta_j}$, $(1 \leq k \leq p)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, on peut alors trouver des polynômes

$Q_1, Q_2, \cdots, Q_p$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{p} Q_k P_k = 1$ (théorème de Bézout). On a alors :

$$Id = \sum_{k=1}^{p} Q_k(u) \circ P_k(u)$$

et tout x de E s'écrit $x = \sum\limits_{k=1}^{p} (Q_k(u) \circ P_k(u))(x)$ avec :

$$(Q_k(u) \circ P_k(u))(x) \in Ker(u - \lambda_k Id)^{\beta_k} = N_k$$

C'est-à-dire que $(Q_k(u) \circ P_k(u))(x)$ est la projection de x sur N_k parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} N_j$. On a donc :

$$\pi_k = Q_k(u) \circ P_k(u) \in \mathbb{K}[u].$$

■

Les projecteurs π_k de E sur N_k parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} N_j$ sont les projecteurs spectraux de u.

Thorme 2.9 (Dunford-Schwarz) *Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple (d, v) d'endomorphismes de E tel que d soit diagonalisable, v soit nilpotent, d et v commutent et $u = d + v$.*

Dmonstration. Sur chaque sous espace vectoriel N_k, on a vu que l'endomorphisme $v_k = (u - \lambda_k Id)_{|N_k}$ est nilpotent et en notant $d_k = \lambda_k Id_{|N_k}$, on a $u_{|N_k} = d_k + v_k$ avec d_k diagonalisable, v_k nilpotent et $d_k v_k = v_k d_k$.

On définit alors les endomorphismes d et v par $d = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k$ et $v = u - d$.

L'endomorphisme d est diagonalisable ($d = d_k$ sur N_k), l'endomorphisme v est nilpotent ($v = v_k$ sur N_k), d et v commutent puisqu'ils sont dans l'algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ et $u = d + v$.

Il reste à montrer l'unicité d'un tel couple (d, v) .

Soit (d', v') un autre couple d'endomorphismes vérifiant les mêmes conditions que (d, v). Comme $u = d' + v'$ et d' et v' commutent, ils commutent avec u donc avec d et v qui sont des polynômes en u. On a alors $d - d' = v' - v$, avec $d - d'$ diagonalisable comme somme de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent (exercice 3.3) et $v' - v$ nilpotent comme somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent. Et nécessairement $d - d' = v' - v = 0$. D'où l'unicité de la décomposition. ■

Pratiquement la décomposition de Dunford-Schwarz d'un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ passe par le calcul des projecteurs spectraux π_k. Pour ce faire il suffit de disposer d'un polynôme annulateur de u de la forme :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k},$$

avec $m_k \geq \beta_k$ pour tout k compris entre 1 et p où les λ_k sont les valeurs propres de u et β_k est la multiplicité de λ_k comme racine du polynôme minimal (on peut prendre pour polynôme P le polynôme caractéristique, ou mieux le polynôme minimal, de u).

À partir de la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{\alpha_{ik}}{(X - \lambda_k)^i},$$

en posant, pour tout k compris entre 1 et p :

$$\begin{cases} Q_k(X) = \sum\limits_{i=1}^{m_k} \alpha_{ik} (X - \lambda_k)^{m_k - i}, \\ P_k(X) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (X - \lambda_j)^{m_j}, \end{cases}$$

on obtient :

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{Q_k(X)}{(X - \lambda_k)^{m_k}}$$

et la décomposition de Bézout :

$$1 = \sum_{k=1}^{p} Q_k P_k$$

qui permet d'obtenir les projecteurs spectraux :

$$\pi_k = (Q_k P_k)(u).$$

On a alors $u = d + v$ avec $d = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k$ et $v = u - d$.

La décomposition de Dunford-Schwarz d'un endomorphisme u de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ permet le calcul de ses puissances successives. En effet comme d et v commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$\forall r \geq 1, \quad u^r = (d + v)^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k d^k \circ v^{r-k}.$$

Le calcul des puissances successives de l'endomorphisme d peut se faire dans une base de diagonalisation ou en utilisant les propriétés des projecteurs pour écrire que :

$$\forall r \geq 1, \quad d^r = \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k \right)^r = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^r \pi_k$$

et le calcul des puissances successives de l'endomorphisme nilpotent v s'arrête à v^{q-1} où q est son indice de nilpotence.

On peut aussi calculer v^r avec :

$$\forall r \geq 1, \quad v^r = \left(\sum_{k=1}^{p} (u - \lambda_k Id) \pi_k \right)^r = \sum_{k=1}^{p} (u - \lambda_k Id)^r \pi_k$$

Avec l'exercice 2.16 on a un exemple de tels calculs.

2.7 Exercices

On note toujours $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et on désigne par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Exercice 2.1 *Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit les matrices réelles R et J par $R = \Re(P)$ et $J = \Im(P)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que la matrice $R + \lambda J$ soit inversible. En déduire que si A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Solution. Si le polynôme $\varphi(X) = \det(R + XJ)$ s'annule pour toute valeur réelle il est alors identiquement nul et $\varphi(i) = \det(R + iJ) = \det(P) = 0$ ce qui contredit P inversible. Il existe donc des réels λ tels que $\varphi(\lambda) = \det(R + \lambda J) \neq 0$.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe alors une matrice P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$. On a alors en notant R la partie réelle de P et J sa partie imaginaire :

$$(R + iJ) A = B (R + iJ)$$

et en identifiant parties réelles et parties imaginaires $RA = BR$, $JA = BJ$. Pour tout réel λ tel que $R + \lambda J$ soit inversible on a alors $(R + \lambda J) A = B (R + \lambda J)$, ce qui prouve que les matrices A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.2 *Montrer que pour tout endomorphisme u de E il existe un sous espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u.*

Solution. Le polynôme minimal π_u se décompose dans l'anneau factoriel $\mathbb{K}[X]$ en produit de facteurs irréductibles, ces facteurs étant de degré 1 ou 2 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si π_u admet un facteur irréductible de degré 1, ce dernier est de la forme $X - \lambda$ avec λ dans $\mathbb{K}$ et λ est une valeur propre de u. Il est alors facile de vérifier que pour tout vecteur propre x dans $E - \{0\}$ associé à cette valeur propre la droite vectorielle $D = \mathbb{K}x$ est stable par u. Si tous ces facteurs irréductibles sont de degré 2, ils sont de la forme $X^2 + bX + c$ et le polynôme π_u s'écrit $\pi_u(X) = (X^2 + bX + c) Q(X)$. De l'égalité :

$$0 = \pi_u(u) = \left(u^2 + bu + cId\right) \circ Q(u)$$

et du caractère minimal de π_u on déduit que l'endomorphisme $u^2 + bu + cId$ n'est pas injectif, c'est-à-dire que son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Pour tout

Solution. On note :

$$\begin{aligned} P_{AB}(\lambda) &= (-1)^n \left(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n\right), \\ P_{BA}(\lambda) &= (-1)^n \left(\lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + \dots + q_{n-1}\lambda + q_n\right), \end{aligned}$$

les polynômes caractéristiques des matrices AB et BA.

On a :

$$p_1 = -\operatorname{Tr}(AB) = -\operatorname{Tr}(BA) = q_1.$$

Supposons que $p_j = q_j$ pour tout entier j compris entre 1 et $k-1$ avec $2 \leq k \leq n$. On a alors, en utilisant les formules de Newton relatives à la matrice AB :

$$\begin{array}{rcl} kp_k & = & -\left(S_k + p_1 S_{k-1} + \cdots + p_{k-1}S_1\right) \\ & = & -\left(S_k + q_1 S_{k-1} + \cdots + q_{k-1}S_1\right) \end{array}$$

avec, pour tout entier j compris entre 1 et $k-1$:

$$S_j = \operatorname{Tr}\left(A\left(B(AB)^{j-1}\right)\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(B(AB)^{j-1}\right)A\right) = \operatorname{Tr}\left((BA)^j\right).$$

On déduit alors que $kp_k = kq_k$.

On a donc ainsi montré par récurrence que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Cette démonstration est valable pour tout corps commutatif $\mathbb{K}$.

Exercice 2.16 *Ecrire la décomposition de Dunford-Schwarz de la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

En déduire un calcul de A^r pour tout entier r strictement positif.

Solution. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = X(X-1)^3$ et son polynôme minimal est $\pi_A(X) = X(X-1)^2$. On a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{\pi_A(X)} = \frac{1}{X} + \left(\frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1}\right)$$

qui donne la décomposition de Bézout :

$$1 = (X-1)^2 + \left(2X - X^2\right)$$

et les projecteurs spectraux :

$$\pi_1 = (A - I_4)^2, \quad \pi_2 = 2A - A^2$$

(on a $\pi_1 + \pi_2 = I_4$). On obtient alors la décomposition $A = D + V$ avec :

$$D = \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $r > 0$, on a :

$$A^r = D^r + rD^{r-1}V$$

$(D^2 = 0)$ avec $D^r = \pi_2^r = \pi_2 = D$. Soit :

$$\forall r \geq 2, \quad A^r = D\left(I_4 + rV\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$