

Introduction au traitement du signal

AGRÉGATION - OPTION MODÉLISATION - THÈME "TÉLÉCOMMUNICATION".

O. Bokanowski

Février 2005

1 Analyse d'un signal

On considère la donnée d'un signal $f(t)$, où t est la variable temps, et $y = f(t)$ est l'intensité du signal à l'instant t . On va chercher à analyser le signal, par exemple pour reperer des fréquences particulières, à "filtrer" le signal (afin d'enlever des bruits parasites), et on s'intéressera aussi à la compression numérique du signal.

Echantillonnage. Dans la pratique, on ne connaît pas vraiment $f(t)$ mais on suppose avoir un système capable d'échantillonner la fonction $f(t)$ aux instants $t_k = k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, et les valeurs qui sont à notre disposition seront les $y_k = f(t_k)$.

Pour des raisons pratiques, on analyse le signal dans une "fenêtre" de temps $t \in [0, T]$, $T > 0$. Prenons $\Delta t = T/N$ de sorte qu'on a N échantillons (ou mesures) dans cet intervalle, ce sont les valeurs $y_k = f(t_k)$, $k = 0, \dots, N-1$.

Question (Q1). Une première question type que nous nous posons dans cette étude est de savoir si l'on peut reconstruire tout le signal $f(t)$ à partir des seules valeurs échantillonnées $y_k = f(t_k)$.

Analyse en Fréquence. On peut alors développer en série de Fourier la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$. Ses coefficients de Fourier sont:

$$c_j(f) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi jt/T} dt. \quad (1)$$

On rappelle que pour une fonction $f \in L^2(0, T)$ (espace des fonctions de carré sommable sur $(0, T)$), on a l'identité de Parseval

$$\|f\|_{L^2}^2 := \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |c_j(f)|^2,$$

ainsi que la convergence de la série en norme $L^2(0, T)$:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j(f) e_j, \quad \text{avec} \quad e_j(t) = e^{2i\pi jt/T}.$$

(au sens $\lim_{A,B \rightarrow +\infty} \|f - \sum_{-A \leq j \leq B} c_j(f) e_j\|_{L^2(0,T)} = 0$).

Spectre d'amplitude.

Il s'agit d'un graphe dans lequel on représente les "amplitudes" $|c_n(f)|$ en fonction de n . Ceci permet de voir quel "poids" est affecté sur la fréquence $\lambda_n = n/T$, c'est à dire sur le signal $e^{2i\pi\lambda_n t}$. Lorsque l'unité de t est en secondes, l'unité de λ_n est en s^{-1} , appele aussi le "Hertz" (en abregé "Hz"). La fréquence fondamentale d'analyse du signal est $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{T}$ Hz. Les autres frequences, multiples de la frequence fondamentale, sont appellees "harmoniques."

Par exemple, considerons le signal suivant:

$$f(t) = c_1 e^{2i\pi\nu_1 t} + c_2 e^{2i\pi\nu_2 t},$$

où $\nu_1 = 220$ Hz, cad 220 pulsations par seconde, et $\nu_2 = 330$ Hz. (On peut prendre aussi des cosinus au lieu des exponentielles complexes). Ce signal est un accord LA-MI en musique, car ν_1 correspond à la fréquence de la note "LA" et ν_2 correspond à la note "MI". (Voir Gasquet-Witomski [1], Chap. 7). Noter que $\nu_2 = \frac{3}{2}\nu_1$: on parle de "quinte" en musique.

Le spectre d'amplitude est donné en Fig.1.

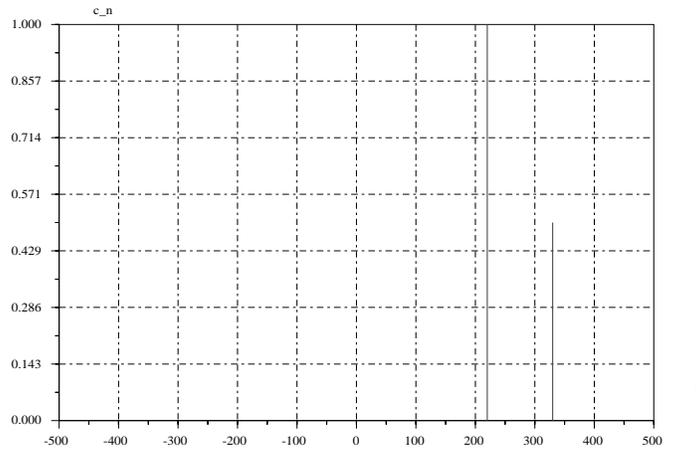


Figure 1: Spectre d'amplitude d'un accord LA-MI (220 Hz-330 Hz)

2 Transformée de Fourier Discrète

En pratique, on considère l'approximation de Riemann des $c_j(f)$:

$$c_j(f) \simeq c_j = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-2i\pi j t_k / T} \Delta t.$$

Comme $\Delta t = T/N$, et $y_k = f(t_k)$, on obtient

$$c_j(f) \simeq c_j, \quad \text{avec} \quad c_j := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi j k / N}. \quad (2)$$

En général, on sait donc calculer les coefficients c_j , mais pas les coefficients exacts $c_j(f)$.

Question (Q2). Une deuxième question que nous nous posons est de comprendre quelle erreur fait-on entre les coefficients exacts $c_n(f)$ et les c_n qu'on calcule (c'est à dire ceux obtenus à partir des échantillons y_k) ?

Une première réponse simple découle de la remarque suivante:

Remarque 1 On a bien $c_j(f) = c_j$, $j \in [0, \dots, N-1]$ pour tout polynôme trigonométrique $f(t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \bar{c}_\ell e^{2i\pi \ell t / T}$.

Preuve. Le vérifier pour chaque $e_\ell(t) = e^{2i\pi \ell t / T}$, pour $0 \leq \ell \leq N-1$. \square

L'approximation (2) motive les définitions suivantes.

Définition 1 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

• On note

$$\hat{y}(j) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi j k / N}$$

la **TFD** de la suite (y_k) .

• De même, on définit la **TFD inverse** de la suite (c_j) par:

$$\check{c}(k) := \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2i\pi j k / N}.$$

Remarques

- 1) L'approximation (2) correspond donc à la TFD du signal (y_k) : $c = \hat{y}$.
- 2) La suite c_j , définie pour $j \in \mathbb{Z}$, est N -périodique ($c_{j+N} = c_j$).

3) Les TFD directe et inverse sont stables sur l'ensemble des suites N périodiques

$$N_{per} := \{(c_j) \mid c_{j+N} = c_j, \quad \forall j\}.$$

Dans ce cas on peut prendre dans les définitions une sommation sur tout intervalle de N entiers consécutifs. En particulier pour N pair et (c_j) N -périodique, on pourra écrire $\check{c}(k) := \sum_{j=-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1} c_j e^{2i\pi jk/N}$.

4) On retiendra l'analogie avec les définitions des transformées de Fourier directe et réciproque: $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$ et $\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi x\xi} dx$.

Proposition 1 $(\hat{y})^\vee = y$.

Preuve. Notons $U := (e^{-2i\pi jk/N})_{0 \leq j, k \leq N-1}$. On voit que $c = \hat{y}$ s'écrit matriciellement $c = \frac{1}{N} U y$, avec $y := (y_0, \dots, y_{N-1})^T$ et $c := (c_0, \dots, c_{N-1})^T$. Il s'agit donc de vérifier la relation $\frac{1}{N} U^* U = I_N$, qui s'obtient en remarquant que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi(\ell-j)k/N} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell - j \equiv 0[N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{\ell j}$$

□

Une première réponse positive à la question (Q1) vient du corollaire suivant.

Corollaire 1 *On considère un polynôme trigonométrique*

$$p(t) := \sum_{j=-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1} \alpha_j e^{2i\pi jt/T}, \quad (3)$$

avec N pair, et on note $y_k = p(t_k)$, pour $k = 0, \dots, N-1$. Alors $\alpha = \hat{y}$. Ainsi à partir des valeurs $y_k = p(t_k)$ on peut retrouver toutes les valeurs de $p(t)$ pour t quelconque.

Preuve. On a $p(t_k) = \sum_{j=-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1} \alpha_j e^{2i\pi jk/N} = \sum_{j=0, \dots, N-1} \alpha_j e^{2i\pi jk/N} =$

$\check{\alpha}(k)$ car $j \rightarrow \alpha_j e^{2i\pi jt/T}$ est N -périodique. D'après la proposition, $\check{\alpha}(k) = y_k$.
□

Remarques et notations complémentaires.

• Les **fréquences** intervenant dans le polynôme trigonométrique $p(t) := \sum_{j=-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1} c_j e^{2i\pi jt/T}$ sont

$$\lambda_j = j/T.$$

- Ici, on définit la **fréquence de coupure** par

$$\lambda_c := \max_{j; c_j \neq 0} |\lambda_j|,$$

c'est à dire la fréquence maximale dans $p(t)$. On voit que $\lambda_c \leq \frac{1}{2} \frac{N}{T}$.

- On définit aussi la **fréquence d'échantillonnage** par

$$\lambda_{ech} := \frac{N}{T} = \frac{1}{\Delta t},$$

qui correspond à un nombre de points de mesure par unité de temps.

On remarque que dans le corollaire 1 nous avons

$$\lambda_{ech} \geq 2\lambda_c.$$

En résumé, dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale du signal analysé, on peut récupérer exactement le signal trigonométrique $p(t)$ de départ à partir des échantillons $y_k = p(t_k)$.

Dans la section suivante, nous donnons une première généralisation de ce résultat (dû à *Shannon*).

3 Formule de Shannon pour une fonction trigonométrique

On démontre, pour f définie sur \mathbb{R} , la formule suivante (dite "Formule de Shannon"):

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(t - na)\right)}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \quad (4)$$

(par exemple pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. $\text{supp}(\hat{f}) \subset]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$). Une démonstration est donnée en Annexe. Dans cette formule, on échantillonne aux $t_k = ka$. Donc la période d'échantillonnage est $\Delta t = a$ et la fréquence d'échantillonnage est $\lambda_{ech} := \frac{1}{a}$.

On peut établir facilement la formule de Shannon dans le cas "trigonométrique":

Proposition 2 Soit $f(t) := \sum_{j=1}^P c_j e^{2i\pi\lambda_j t}$, avec λ_j réels. On suppose

$$\lambda_{ech} > 2\lambda_c, \quad \text{avec} \quad \lambda_c := \max_j |\lambda_j|$$

Alors la formule (4) est valable pour tout $t \in]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$.

Preuve. Par linearite il suffit d'obtenir la formule (4) dans le cas d'une seule exponentielle, $f(t) := e^{2i\pi\lambda t}$. Il s'agit d'exprimer $f(t)$ en fonction des valeurs $f(na) = e^{2i\pi\lambda\frac{n}{1/a}}$. On va developper $f(t) = e^{2i\pi\lambda t}$ en série de Fourier de période $T = 1/a$, sur l'intervalle de temps $t \in]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[=]-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$. Pour $|t| < \frac{1}{2a}$, on obtient

$$e^{2i\pi\lambda t} = f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi\lambda\frac{n}{1/a}}, \quad (5)$$

avec

$$c_n = \frac{1}{1/a} \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} f(t) e^{-2i\pi\frac{n}{1/a}\lambda t} dt = \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(\lambda - na))}{\frac{\pi}{a}(\lambda - na)}.$$

(pour l'egalite dans (5), noter qu'on est dans le cas de $f \in C_{pm}^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$. Echangeons alors les parametres t et λ . Les coefficients c_n deviennent les mêmes que ceux de (4), et on constate que (5) donne exactement la formule de Shannon (4). (La convergence de la serie s'obtient donc par convergence de la série de Fourier dans le cas de fonctions C_{pm}^1). \square

4 Relation entre $c_j(f)$ et c_j

Revenons à l'analyse de notre signal $f(t)$ sur $[0, T]$. Ecrivons formellement:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n(t)$$

Donc

$$f(t_k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi\frac{nk}{N}}$$

et

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi\frac{nk}{N}} \right) e^{-2i\pi\frac{jk}{N}}$$

Supposons que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$. Noter que ceci est réalisé par exemple pour

$$f \in C_{pm}^1([0, T]) \cap C^0([0, T]), \quad \text{avec} \quad f(0) = f(T). \quad (6)$$

On peut alors intervertir les sommations:

$$c_j = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi\frac{k(n-j)}{N}} \right)$$

Or $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{k(n-j)}{N}} = 1$ si $n - j \equiv 0[N]$, et vaut 0 sinon. Donc on obtient

Proposition 3 si $f \in C_{pm}^1([0, T])$ et si les $t_k = k\Delta t$ ($0 \leq k \leq N - 1$) sont des points de continuité de f , alors

$$c_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j+kN}(f) \quad (7)$$

Preuve: utiliser la convergence de la série de Fourier aux points de continuité.

Conclusion. Reprenons l'exemple d'un signal trigonometrique sur $(0, T)$:

$$f(t) := \sum_{j=-P, \dots, P-1} c_j e^{2i\pi j t / T}$$

de frequence de coupure $\lambda_c \leq \frac{P}{T}$. Considerons un echantillonnage par N points t_k equirepartis ($t_k = kT/N$), avec N pair. On a donc une frequence d'echantillonnage $\lambda_{ech} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{N}{T}$. Notons $y_k = f(t_k)$ et $c = \hat{y}$ et appliquons la formule (7).

- Dans le cas où $\lambda_{ech} > 2\lambda_c$ (ou encore $\frac{N}{2} > P$), on retrouve donc $c_j = c_j(f)$ pour $j \in I = [-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1]$. En effet, les autres coefficients $c_{j+kN}(f)$ sont nuls pour $j \in I$ et $k \neq 0$. De plus, on peut reconstruire le signal $f(t)$ a partir des $y_k = f(t_k)$ (voir Corollaire 1).

- Dans le cas où $\lambda_{ech} < 2\lambda_c$ (ou encore $\frac{N}{2} < P$), alors des termes non nuls $c_{j+kN}(f)$ vont apparaitre dans la formule pour c_j ($j \in I$). Cela signifie que notre analyse va être "perturbée". En particulier, des coefficients c_j non nuls peuvent apparaitre, alors que $c_j(f) = 0$. Le spectre d'amplitude, construit a partir des c_j (calculés par analyse des y_k), peut faire apparaitre des fréquences parasites.

Dans la pratique, on travaille à frequence d'echantillonnage donnée. Pour eviter le probleme precedent il faut "filtrer" de maniere analogique le signal $f(t)$, de sorte de retirer les frequences trop grandes, avant d'analyser le signal.

D'autres methodes d'analyse sont possibles, telle l'analyse par ondelettes (voir Section 7).

5 Transformee de Fourier Rapide

Le principe: on veut effectuer rapidement la multiplication matrice-vecteur $A_N X$ où $A_N = (e^{2i\pi j k / N})_{0 \leq j, k \leq N-1}$ et $X \in \mathbb{C}^N$. Une méthode directe coûte de l'ordre de $2N^2$ operations elementaires (additions, multiplications), soit un cout quadratique par rapport à N .

Supposons $N = 2^n$. Cherchons à ramener le calcul de $Y = A_{2N}X$ (pour X de taille $2N$), à deux calculs analogue $A_N U$ et $A_N V$ de taille N . Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{2N-1} \end{pmatrix}$$

Notons u et v les vecteurs de coordonnees x_j paires et impaires resp.:

$$U = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2N-2} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{2N-1} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{j(2k)}{2N}} x_{2k} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{j(2k+1)}{2N}} x_{2k+1} \quad (8)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{jk}{N}} u_k + e^{i\pi \frac{j}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{jk}{N}} v_k \quad (9)$$

Donc pour $j = 0, \dots, N-1$:

$$y_j = (A_N U)_j + e^{i\pi \frac{j}{N}} (A_N V)_j \quad (10)$$

$$y_{j+N} = (A_N U)_j - e^{i\pi \frac{j}{N}} (A_N V)_j \quad (11)$$

On en déduit en terme de coût numérique:

$$Cout(2N) = 2Cout(N) + 3N.$$

Donc

$$\begin{aligned} Cout(N) &= 2Cout\left(\frac{N}{2}\right) + \frac{3}{2}N \\ Cout(N) &= 4Cout\left(\frac{N}{4}\right) + \frac{3}{2}N + \frac{3}{2}N \\ &\vdots \\ &= NCout(1) + \frac{3}{2}N n \end{aligned}$$

Comme $n = \log_2(N)$ et $Cout(1) \leq 1$ (une affectation), on a donc

$$Cout(N) \simeq \frac{3}{2} N \log_2(N)$$

soit un cout presque lineaire par rapport à N .

Algorithme récursif FFT (Fast Fourier Transform):

```

function y=FFT(x)
// effectue la multiplication y= (e^{2i\pi jk/N}) * x
// 0 <= j,k <= N-1
// x,y sont des vecteurs colonnes
// La taille de x doit etre une puissance de 2.
N=length(x)
if N==1 then
  y=x;
else
  u=x(1:2:N-1);
  v=x(2:2:N);
  u1=FFT(u);
  v1=FFT(v);
  n=N/2; v1=v1 .* exp(%i*%pi*(0:n-1)'/n);
  y=[u1+v1; u1-v1];
end

```

Il existe aussi une commande SCILAB `fft` effectuant les TFD directe et inverse par methode rapide:

Commande	Operation effectuée
<code>y=fft(x,-1)</code>	$y = A_N^* x$: TFD directe, au coefficient $\frac{1}{N}$ près
<code>y=fft(x,1)</code>	$y = \frac{1}{N} A_N x$: TFD inverse, au coefficient $\frac{1}{N}$ près

6 Applications

6.1 Analyse d'un accord LA-MI.

Les réponses aux questions posées dans ce paragraphe pourront être obtenues a l'aide du script SCILAB fourni en annexe. On pourra aussi consulter Gasquet-Witomski [GW], Chapitres 7, 8, et 38.5.

On cherche à analyser un signal qui correspond à un accord LA-MI. La note LA correspond par exemple à la fréquence $\nu_1 = 220$ Hz, cad 220

pulsations par seconde. La note MI correspond à $\nu_2 = \frac{3}{2}220 = 330$ Hz (cf [1], chap. 7). On se donne donc un signal de la forme

$$f(t) = c_1 e^{2i\pi\nu_1 t} + c_2 e^{2i\pi\nu_2 t}.$$

(On pourrait prendre aussi des cosinus au lieu des exponentielles complexes).

On désire faire une analyse sur $t \in [0, T]$ (avec $T = 1$ par exemple), avec une fréquence d'échantillonnage $\nu_{ech} = N/T$, dans les cas suivants:

- un accord pur (signal $f(t)$ précédent).
- un accord bruité: chaque mesure $f(t_k)$ devient $f(t_k) + r_k$ où r_k est un nombre aléatoire. On pourra tirer $r_k = cU_k$ où c est une constante, et U_k est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

On cherchera d'abord à tracer le spectre d'amplitude, pour des fréquences $j \in [-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1]$.

Pour l'analyse de $f(t)$, on pourra commencer par supposer que

$$f(t) \sim \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} c_j(f) e^{2i\pi j t/T}.$$

On approche la formule integrale de $c_j(f)$ par l'approximation de Riemann, i.e. les coefficients c_j obtenu par TFD des valeurs $\{y_0, \dots, y_{N-1}\}$ où $y_k = f(t_k)$.

Quand la formule $c_j(f) = c_j$ est-elle exacte ?

En pratique, il faudra prendre un échantillonnage suffisamment fin par rapport aux fréquences ν du signal analysé. (Préciser cela en terme de fréquence d'échantillonnage, par rapport aux fréquences du signal analysé).

Que se passe-t-il alors si on n'échantillonne pas assez finement ?

Quelques tests types à effectuer et à comprendre:

- 1) $N = 1000$, puis $N = 500$;
- 2) $\nu_1 = 220.1$;
- 3) Échantillonnage faussé: $t_k = kT/(N + 1)$ (au lieu de kT/N).

6.2 Produit de convolution.

On définit le produit de convolution de deux suites x, y, N -periodiques par

$$(x * y)(j) := \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{j-k}.$$

On considère une matrice circulante, de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{N-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & a_0 \end{pmatrix}$$

(ou matrice de *toeplitz*). On remarque que le calcul de AX correspond à un produit de convolution. En effet si

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

(et si x et a sont prolongés par N -périodicité) alors $(AX)_j = (x * a)(j)$.

Dans la suite, on s'intéresse à

- (i) la résolution d'un système linéaire du type $AX = b$ (a, b donnés);
- (ii) le calcul rapide de AX (a, x donnés).

Proposition 4 $(x * y)^\wedge = N\hat{x}\hat{y}$ (et de même, $(x * y)^\vee = \check{x}\check{y}$.)

Preuve. : Exercice.

Ainsi pour le problème (i) on a $AX = b \Leftrightarrow a * x = b \Leftrightarrow N\hat{a}\hat{x} = \hat{b}$. En supposant que $\forall j, \hat{a}(j) \neq 0$ on obtient donc $\hat{x} = \frac{1}{N}\hat{b}/\hat{a}$.

Combien ça coûte ? En notant $c_N = \frac{3}{2}N \log_2(N)$ le coût de calcul d'une TFD ou d'une TFD inverse (via l'algorithme rapide), on a :

$$\begin{array}{ccccc} TFD & & & & TFD^{-1} \\ a, b & \xrightarrow{2c_N} & \hat{a}, \hat{b} & \xrightarrow{2N} & \hat{x} = \frac{1}{N}\hat{b}/\hat{a} & \xrightarrow{c_N} & x \end{array}$$

Soit un coût total de l'ordre de $3c_n + 2N \sim \frac{9}{2}N \log_2(N)$

De même, on peut calculer le produit de convolution $a * b$ (ou le produit matriciel AX) en $\frac{9}{2}N \log_2(N)$ opérations élémentaires.

7 Analyse par ondelette

L'idée est de coder l'information suivant 1) une information moyenne et 2) les détails manquant (à un niveau plus fin), et de recommencer récursivement ce procédé de codage sur les nouveaux détails.

Commençons par poser $\phi = 1_{[0,1]}$ ainsi que les fonctions dilatées-dilatées $\phi_{n,j}(x) := 2^{n/2}\phi(2^n x - j)$ pour $n \geq 0$ et $j = 0, \dots, 2^n - 1$. Le coefficient $2^{n/2}$ permet d'avoir la normalisation $\|\phi_{n,j}\|_{L^2(0,1)} = \|\phi\|_{L^2(0,1)} = 1$; on voit aussi que $\text{supp}(\phi_{n,j}) = I_{n,j} := 2^{-n}[j, j+1]$.

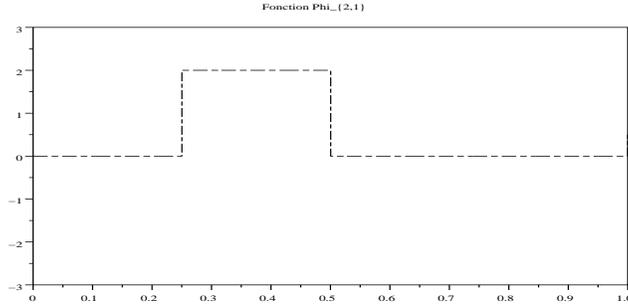


Figure 2: Graphe de $\phi_{n,j}$

L'indice n représente le *niveau* ou l'*échelle*. Pour n petit, le niveau est grossier. Plus n est grand, plus le niveau est "fin".

On définit la fonction de Haar, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, par

$$\psi = 1_{[0, \frac{1}{2}]} - 1_{[\frac{1}{2}, 1]}$$

soit $\psi(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\psi(x) = -1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, et $\psi(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$. La fonction ψ va jouer le rôle de l'ondelette.

On pose $\psi_{n,j}(x) = 2^{n/2}\psi(2^n x - j)$ pour $n \geq 0$ et $j = 0, \dots, 2^n - 1$. Comme pour les $\phi_{n,j}$ on a $\text{supp}(\psi_{n,j}) = I_{n,j}$ et $\|\psi_{n,j}\|_{L^2(0,1)} = 1$.

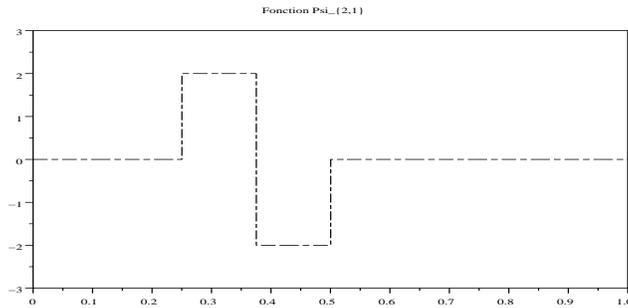


Figure 3: Graphe de $\psi_{n,j}$

On note

$$V_n := \text{Vect}(\phi_{n,j}, j = 0, \dots, 2^n - 1),$$

l'espace des fonctions "moyennes" de niveau n , qui sont les fonctions constantes par morceaux sur les I_j^n . Par exemple $V_0 = Vect(\phi)$ sont les fonctions constantes (sur $(0, 1)$), $V_1 = Vect(\phi(2x), \phi(2x-1))$ est l'espace des fonctions constantes sur les morceau $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$, etc.

On note

$$W_n := Vect(\psi_{n,j}, j = 0, \dots, 2^n - 1),$$

l'espace des ondelettes, ou fonctions "détails", de niveau n .

Proposition 5 (i) $\forall k \geq 0, V_{k+1} = V_k \oplus W_k$.

(ii) $\forall n \geq 1, V_n = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{n-1}$.

(iii) $\mathcal{F} := \{\phi, (\psi_{n,j})_{n \geq 0, j=0, \dots, 2^n-1}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(0, 1)$.

Remarque: La propriete (iii) revient aussi a dire que \mathcal{F} est une famille orthonormée de $L^2(0, 1)$ et que $H := V_0 + Vect(\psi_{n,j})$ est dense dans $L^2(0, 1)$.

Preuve. (i) On note que $\phi(2x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \psi(x))$ et que $\phi(2x-1) = \frac{1}{2}(\phi(x) - \psi(x))$ On en deduit que $V_1 \subset V_0 + W_0$. Réciproquement on a $V_0, W_0 \subset V_1$, et donc

$$V_1 = V_0 + W_0.$$

Enfin l'orthogonalite de V_0 et de W_0 est evidente. La relation (i) s'obtient de la meme facon pour $k \geq 1$.

(ii) Par récurrence a partir de (i).

(iii) Commençons par prouver l'orthogonalité de la famille \mathcal{F} (la normalisation etant réalisée). Comme toutes les fonctions ψ_j^n sont de moyenne nulle (puisque ψ l'est), on a deja l'orthogonalité des ψ_j^n avec $\phi \equiv 1$.

Ensuite, comme $\psi_{n,j} \in W_n$, on a $\langle \psi_{n,j}, \psi_{n',j'} \rangle = 0$ si $n \neq n'$ en utilisant l'orthogonalite de W_n et $W_{n'}$ d'après (i). Puis pour $n = n'$, et $j \neq j'$ on a $\langle \psi_{n,j}, \psi_{n,j'} \rangle = 0$ car les supports sont disjoints.

Montrons maintenant que $H := Vect(\phi, \psi_j^n)$ est dense dans $L^2(0, 1)$. D'après (ii) on a $V_n \subset H$. Il suffit de montrer que pour tout $f \in L^2(0, 1)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{L^2}(f, V_n) = 0.$$

Soit donc $f \in L^2(0, 1)$. Posons $N = 2^n$ et notons $S_N := P_{V_n}(f)$ la projection orthogonale de f sur V_n . On a donc

$$S_N(f)(x) = \sum_{j=0, \dots, 2^n-1} s_j^n \phi_{n,j}(x), \quad \text{avec } s_j^n := \langle \phi_{n,j}, f \rangle.$$

Lemme 1 Pour $f \in C^1([0, 1])$ on a $\|f - S_N(f)\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} \|f'\|_{\infty}$.

Preuve. Pour $x \in I := I_{n,j}$ on a $|f(x) - S_N(f)(x)| = |f(x) - s_j^n \phi_{n,j}(x)| = |f(x) - 2^n \int_I f(y) dy| \leq 2^n \int_I |f(x) - f(y)| dy \leq 2^n \|f'\|_\infty \int_I |x - y| dy \leq 2^n |I|^2 \|f'\|_\infty = \frac{1}{N} \|f'\|_\infty$ (Majorations grossieres). On en deduit que $\|f - S_N(f)\|_{L^2} \leq \|f - S_N(f)\|_\infty \leq \frac{1}{N} \|f'\|_\infty$. \square

Maintenant soit $\epsilon > 0$. On sait qu'il existe $g \in C^1([0,1])$ telle que $\|f - g\|_{L^2} \leq \epsilon$. D'apres le lemme precedent en prenant $N \geq \|g'\|_\infty / \epsilon$ et avec $g_N := S_N(g)$, on a $\|g - g_N\|_{L^2} \leq \epsilon$. Donc $\|f - g_N\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + \|g - g_N\|_{L^2} \leq 2\epsilon$, ce qui conclu la densité de H dans $L^2(0,1)$ et donc la preuve de (iii). \square

Coefficients d'ondelettes.

On se donne $f \in L^2(0,1)$ et on pose

$$s_j^n := \langle \phi_{n,j}, f \rangle \quad \text{"sommés", ou "moyennes"} \quad (12)$$

$$d_j^n := \langle \psi_{n,j}, f \rangle \quad \text{"détails"} \quad (13)$$

Comme $V_n = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{n-1}$, on a aussi

$$S_N(f)(x) = s_0^0 \phi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} d_j^k \psi_{k,j}(x) \quad (14)$$

Calcul des coefficients s^n au niveau le plus fin.

On utilise tout simplement l'approximation $\int_{I_{n,j}} f(x) dx \simeq 2^{-n} f(x_{n,j})$ où $x_{n,j} := 2^{-n}(j + 1/2)$ est le point milieu de $I_{n,j}$. Ce qui donne:

$$s_j^n \simeq \bar{s}_j^n := 2^{-n/2} f(x_{n,j}).$$

Exercice. Montrer que $|s_j^n - \bar{s}_j^n| \leq 2^{-3n/2} \|f''\|_\infty$ si $f \in C^2$. (Utiliser un developpement de Taylor.) Montrer aussi que $\|f - \bar{S}_N(f)\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} \|f'\|_{L^2}$, où on a noté $\bar{S}_N(f) := \sum_{j=0}^{2^n-1} \bar{s}_j^n \psi_{n,j}$.

Codage.

Il s'agit de calculer tous les coefficients de la decomposition (14) a partir des coefficients s_j^n . On note que

$$\begin{cases} \phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1) \\ \psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1) \end{cases} \quad (15)$$

On deduit immediatement de (15) que

$$\begin{cases} \phi_{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{1,0} + \phi_{1,1}), \\ \psi_{0,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{1,0} - \phi_{1,1}) \end{cases} \quad (16)$$

Donc, en prenant le produit scalaire avec f :

$$\begin{cases} s_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_0^1 + s_1^1) \\ d_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_0^1 - s_1^1) \end{cases} \quad (17)$$

On établit de meme pour $k \geq 0$ que

$$\begin{cases} \phi_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{k+1,2j} + \phi_{k+1,2j+1}) \\ \psi_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{k+1,2j} - \phi_{k+1,2j+1}) \end{cases} \quad (18)$$

et donc que

$$\begin{cases} s_j^k = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{2j}^{k+1} + s_{2j+1}^{k+1}) \\ d_j^k = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{2j}^{k+1} - s_{2j+1}^{k+1}) \end{cases} \quad (19)$$

On en deduit un *Algorithme de Codage*, qui consiste à calculer les coefficients d^{n-1}, \dots, d^0 et s^0 a partir des s^n :

$$\begin{array}{ccccccc} s^n & \rightarrow & s^{n-1} & \dots & s^{k+1} & \rightarrow & s^k & \dots & \rightarrow & s^0 \\ & & \searrow & & & & \searrow & & & \searrow & d^0 \end{array} \quad (20)$$

Décodage. Les relations (19) s'inversent et on obtient

$$\begin{cases} s_{2j+1}^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_j^k + d_j^k) \\ d_{2j+1}^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_j^k - d_j^k) \end{cases}$$

(on pourrait aussi retrouver ces relations a partir des identités $\phi(2x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \psi(x))$ et $\psi(2x) = \frac{1}{2}(\phi(x) - \psi(x))$.)

On en deduit un *Algorithme de décodage*, qui consiste a calculer les coefficients s^n a partir des coefficients s^0, d^0, \dots, d^{n-1} :

$$\begin{array}{ccccccc} s^n & \leftarrow & s^{n-1} & \dots & s^{k+1} & \leftarrow & s^k & \dots & \leftarrow & s^0 \\ & & \swarrow & & & & \swarrow & & & \swarrow & d^0 \end{array} \quad (21)$$

Coût des algorithmes. Le nombre d'opérations élémentaires de l'algorithme de codage est $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} 4 = 4(2^n - 1)$, soit

$$Cout(\text{codage}) \sim 4N.$$

De même pour l'algorithme de décodage on trouve

$$Cout(\text{décodage}) \sim 4N.$$

Remarque. Une generalisation simple de l'analyse précédente sont les "multi-ondelettes" (plusieurs fonctions d'ondelettes sur le meme support), qui permettent d'avoir une meilleure estimation de $\|f - S_N(f)\|$ que $O(\frac{1}{N})$. On ne detaille pas ici cette généralisation.

8 Comparaison entre Fourier et Ondelettes

Les algorithmes à base d'ondelettes sont plus aptes à analyser des signaux discontinus ou qui varient fortement. Dans le cas d'une discontinuité, l'analyse par Fourier présente le phénomène de Gibbs. Les opérations de codage et de decodage sont aussi legerement plus rapide que la FFT et la FFT inverse.

Voici a titre de comparaison une analyse par Ondelettes de Haar et une analyse par Fourier d'une fonction discontinue $f(t) = t$ pour $t < 0.5$ et $f(t) = t - 1$ pour $t > 0.5$. (Pour Fourier, on developpe $f(t) = t$ sur $] -T/2, T/2[$, impaire, qui admet donc le developpement $f(t) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(2\pi n t)$ avec $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$). On a pris $M = 32$ points pour Fourier et aussi $n = 5$, soit $2^n = 32$ points pour l'anaylse par ondelette.

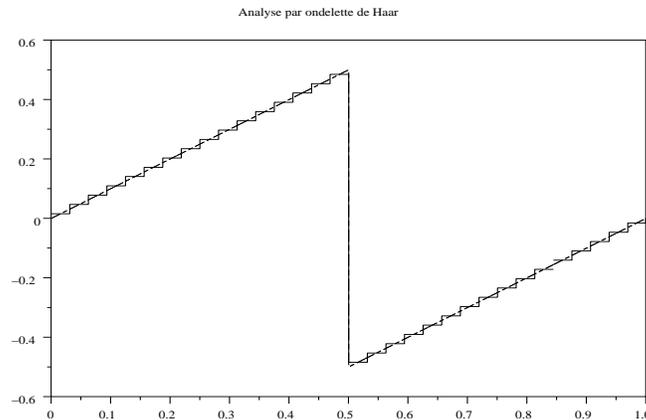


Figure 4: Analyse par Ondelette tronquée au niveau $n = 5$

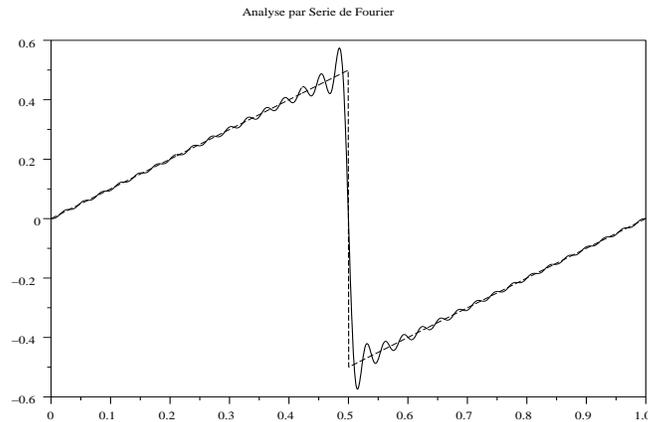


Figure 5: Analyse par Fourier tronquée à l'harmonique $M = 32$. On observe une oscillation au voisinage de la discontinuité, c'est le phénomène de Gibbs.

ANNEXE: Exemple de script scilab pour l'analyse d'un signal.

```

//!-----
//! ECHANTILLONNAGE MUSICAL
//!-----
mode(-1); clear

T=1; N=800;

//! SIGNAL
nu1=220; nu2=3/2*220;      // Frequences LA et MI harmonique, en secondes
c1=1; c2=0.5;             // Poids

function e=ee(t); e=exp(2*i*pi*t); endfunction;
function f=signal(t); f= c1*ee(nu1*t) + c2*ee(nu2*t); endfunction ;

//! ECHANTILLONNAGE sur [0,T]
t=(0:N-1)'/N*T;
y=signal(t);

//! BRUITAGE EVENTUEL
// bruit = rand(y)-(1+i)*0.5; bruit=bruit/norm(bruit);
// y=y+ 0.5 * bruit * norm(y);

//! Estimations des  $c_n(f)$  = poids des frequences  $v_n = n/T$ , par FFT
c=fft(y,-1)/N;

```

```

//! FILTRAGE EVENTUEL: Mise a zero des poids relatif < 0.1
// d=c/norm(c);           // normalisation L^2 -> poids relatifs
// indices=find(abs(d)<0.1)'; // reperage des indices a poids rel.< 0.1
// c(indices)=0;           // poids rel.<0.1 mis a zeros.

//! SPECTRE D"AMPLITUDE sur [-N/2, N/2-1]
//! On utilise la N-periodicite des c_j:
//! c_{-N/2}=c_{N/2-1}, .... ,c_{-1}=c_{N-1}
xset('window',0);
xbasc();
indices=[0:N/2-1, -N/2:-1]'; // au lieu des indices=[0:N-1]'
plot2d3('onn',indices/T,abs(c),5,rect=[-N/2 0 N/2 1]);
xlabel('spectre d''amplitude','n','c_n');
input('')

```

Illustration sonore:

Voir le fichier `analyse.sci`. Tester avec $N = 800$, puis $N = 600$.

ANNEXE:

Formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$ et Theoreme de Shannon

Formule de Poisson. Il s'agit d'un Développement en Série de Fourier (en abrégé DSF) de la fonction a-périodique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t - na)$. On note \hat{f} et \check{f} respectivement, les transformées de Fourier directe et réciproque de f , définies par:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx$$

ainsi que

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi x \xi} dx.$$

Dans la suite, on dira qu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est "à dérivée f' dans $L^1(\mathbb{R})$ " s'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{p.p. } x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt \quad (22)$$

(Si g est continue alors on a bien $g = f'$).

Théorème 1 *On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ à dérivée $f' \in L^1(\mathbb{R})$, au sens (22). Alors $\forall a > 0$ on a :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t - na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e_n(t) \quad (23)$$

où on a noté $e_n(t) := e^{\frac{2i\pi nt}{a}}$.

- Dans (23), le membre de gauche converge normalement sur \mathbb{R} vers

$$F(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t - na).$$

En particulier $F \in C^0$ (car $f \in C^0$ d'après (22)).

- F est à variation bornnée sur $[0; a]$.
- Dans (23), le membre de droite converge uniformément vers F sur \mathbb{R} .

Commençons par établir plusieurs lemmes. (Le coeur de la preuve se resume au lemme (4), le reste constitue des details techniques.)

Lemme 2 *La serie $F(t) = \sum_n f(t - na)$ converge normalement sur \mathbb{R} , est continue et 1-periodique.*

Preuve. Soit $G(x) = \int_n^x f(t)dt$. Un développement de Taylor avec reste integral donne $G(n+1) = G(n) + G'(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)G''(t)dt$. On obtient donc que $\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) + R_n$ avec $|R_n| = \left| \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|dt$. Comme $f' \in L^1$, on obtient que la serie $\sum |R_n|$ est AC (absolument convergente). La serie de terme general $\int_n^{n+1} f(t)dt$ est aussi AC car $f \in L^1(\mathbb{R})$. On en deduit que la serie $\sum_n f(n)$ est AC. On peut reprendre sans difficulté le raisonnement pour etudier la serie des $f(t+na)$: On etablit d'abord que $\int_{na+t}^{(n+1)a+t} f(u)du = f(t+na) + R_n(t)$ ($t \in [0, a]$), avec la majoration $|R_n(t)| \leq \int_{na}^{na+a} |f(t+u)| du \leq \int_{na}^{na+2a} |f'(u)| du =: U_n$. De la majoration $\sum U_n \leq 2 \int |f'|$, on deduit la convergence normale sur \mathbb{R} de la serie de terme general $R_n(t)$. Des majorations analogues pour $\int_{na+t}^{(n+1)a+t} f(t)dt$ permettent de conclure à la convergence normale de la serie des $f(t+na)$. \square

Lemme 3 *La fonction F est à variation bornnée sur $[0; a]$.*

Preuve. Pour $0 = t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_p \leq t_{p+1} = a$ on verifie l'inégalité $\sum_{i=0}^p |F(t_{i+1}) - F(t_i)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f'(t)|dt$. Ceci démontre que $V_{[0,a]}(F) \leq \int_{\mathbb{R}} |f'|$. \square

Lemme 4 *Le developpement en serie de Fourier de $F(t)$ (qui est a -periodique) s'écrit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(F) e_n(t)$ avec $c_n(F) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right)$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \frac{1}{a} \int_0^a e^{-2i\pi \frac{n}{a} x} F(x) dx \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^a e^{-2i\pi \frac{n}{a} x} f(x - ka) dx \quad (\text{interversion à l'aide de la C.U.}) \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{ka}^{(k+1)a} e^{-2i\pi \frac{n}{a} x} f(x) dx = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) \end{aligned}$$

\square

Preuve du Th. 1: Comme F est à variation bornée sur $[0; a]$ (et a -periodique), sa serie de Fourier converge sur \mathbb{R} (vers $\frac{1}{2}(F(x^+) + F(x^-))$). La continuite de F permet d'obtenir en outre la convergence uniforme sur \mathbb{R} . \square

Remarque 2 *Une autre façon d'obtenir (23) est de partir de l'identité de Jacobi:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} G_t(x + na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 \frac{t}{2}} e_n(x), \quad (24)$$

où $G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$ (cette identité peut s'obtenir en développant le membre de gauche en série de Fourier). Si on convole avec f on obtient :

$$(e_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e_n(x-y) f(y) dy = e_n(x) \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right).$$

Or $G_t(\bullet + na) * f = G_t * f(\bullet - na)$, donc de (24) on déduit

$$G_t * \underbrace{\sum_n f(x-na)}_{F(x)} = \frac{1}{a} \int_n \underbrace{e^{-\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 \frac{t}{2}}}_{c_n(t)} \hat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e_n(x). \quad (25)$$

Puis on passe à la limite $t \rightarrow 0^+$: $G_t * F \rightarrow F$ dans L^∞ car $F \in C_b^0$, et $c_n(t) \rightarrow 1$. La difficulté ici est de passer rigoureusement à la limite dans le membre de droite de (25). Si on suppose que la série $\sum_n |\hat{f}(\frac{n}{a})|$ converge, alors la série du membre de droite de (25) converge normalement et on obtient (23) à la limite $t \rightarrow 0^+$.

Formule de Shannon.

Nous allons donner une première façon de trouver la formule de Shannon en partant de la formule de Poisson (23). En remplaçant a par $\frac{1}{a}$, le changement $n \rightarrow -n$ et le fait que $\check{f}(-x) = \hat{f}(x)$, on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(t - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(na) e^{2i\pi nat} = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \check{f}(na) e^{-2i\pi nat}$$

Appliquons cette dernière relation à \hat{f} et utilisons la formule de réciprocity $\check{\check{f}} = f$ (valable par exemple pour f et \hat{f} dans $L^1(\mathbb{R})$). On obtient donc, en remplaçant t par ξ :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi - \frac{n}{a}\right) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi na\xi}. \quad (26)$$

(valable pour f , \hat{f} et $(\hat{f})'$ dans $L^1(\mathbb{R})$ par exemple). La formule (26) est la version duale de (23).

Etant donné $t \in \mathbb{R}$, on cherche à reconstruire le signal $f(t)$ à partir des valeurs échantillonnées $f(na)$. On suppose que $\text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_c; \lambda_c]$ ($\lambda_c > 0$ est la "fréquence de coupure"), et on note $\lambda_{ech} := \frac{1}{a}$ (la fréquence d'échantillonnage).

Multiplions (26) par $R(\xi) = 1_{[-\frac{1}{2a}; \frac{1}{2a}]}$ (ξ): (on dit que R est une fonction créneau, ou "fenêtre"). Supposons de plus que $\lambda_c < \frac{1}{2a} = \lambda_{ech}/2$. Alors le membre de gauche de (26) se réduit à $\hat{f}(\xi)$, et on a:

$$\hat{f}(\xi) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) e^{-2i\pi na \xi} 1_{[-\frac{1}{2a}; \frac{1}{2a}]}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

On fait une transformée de Fourier inverse par rapport a la variable ξ . Le membre de droit converge uniformement sur $|\xi| \leq \frac{1}{2a}$, on peut faire la transformation terme a terme. On remarque alors que

$$\begin{aligned} a \check{R}e^{-2i\pi na \xi}(t) &= a \int_{\xi=-\frac{1}{2a}}^{\xi=\frac{1}{2a}} e^{2i\pi A \xi} d\xi, \quad A := t - na \\ &= a \left[\frac{e^{2i\pi A \xi}}{2i\pi A} \right]_{\xi=-\frac{1}{2a}}^{\xi=\frac{1}{2a}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{a} A)}{\frac{\pi}{a} A}. \end{aligned}$$

Finalement:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(t - na))}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \quad (27)$$

Théorème 2 (Formule de Shannon) *Soit f telle que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, et*

$$\text{supp } \hat{f} \subset \left] -\frac{1}{2a}; \frac{1}{2a} \right[\quad \text{où } a > 0.$$

Alors on la formule (27), $\forall t \in \mathbb{R}$, et la serie converge uniformément sur \mathbb{R} .

Preuve. Nous donnons une demonstration directe, qu'on retrouvera dans [DW], Exercice 18.5 page 122. On rappelle que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \equiv f \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'on a la formule de reciprocité (au sens de la limite dans $L^2(\mathbb{R})$): $f(t) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A e^{2i\pi \lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda$. Dans notre cas $f(t) = \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{2i\pi \lambda t} \hat{f}(\lambda) d\lambda$. Developpons alors en serie de fourier de periode $T = \frac{1}{a}$ sur l'intervalle $I = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Posons $(f, g) := \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{f(t)} g(t) dt$, $c_n(f) := (e_n, f)$, et $h(\lambda) := e^{-2i\pi \lambda t}$. On a:

$$f(t) = \frac{1}{a} (h, \hat{f}) \quad (28)$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(h)} c_n(\hat{f} 1_I) \quad (\text{Parseval}) \quad (29)$$

(avec serie absolument convergente car h et $(\hat{f} 1_I)$ sont dans $L^2(I)$). Puis

$$\begin{aligned} c_n(\hat{f} 1_I) &= a \int_{-\frac{1}{2a}}^{-\frac{1}{2a}} e^{-2i\pi nat} \hat{f}(t) dt \\ &= a \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi(-na)t} \hat{f}(t) dt = af(-na). \quad (\text{Réciprocité}) \end{aligned}$$

D'autre part par un calcul direct on obtient $c_n(h) = \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(t+na))}{\frac{\pi}{a}(t+na)}$, ce qui donne la formule cherchée (quitte à changer n en $-n$). La convergence uniforme s'obtient en notant que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\overline{c_n(h)} c_n(\hat{f} 1_I)| &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\overline{c_n(h)}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\hat{f} 1_I)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|h\|_{L^2(I)} \|\hat{f}\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{I} \|\hat{f}\|_{L^2(I)} \end{aligned}$$

□

Exercice 1 Montrer sous les hypotheses precedentes que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(na)|^2 < \infty$, et retrouver la convergence uniforme sur \mathbb{R} .

Indication: utiliser que f et f' sont dans L^2 par un raisonnement analogue au lemme 2. On obtient alors la convergence uniforme par Cauchy-Schwartz.

Remarque 3 Si $\lambda_{ech} \leq 2\lambda_c$ la formule (27) est fausse en général (l'échantillonnage n'est pas assez fin). On pourra reprendre la premiere derivation de la formule de Shannon afin de montrer, par exemple dans le cas où $\text{supp}(\hat{f}) \subset]-\frac{1}{2a}, \frac{3}{2a}[$, que

$$f(t) + f(t)e^{2i\pi \frac{t}{a}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(t - na))}{\frac{\pi}{a}(t - na)} \quad (30)$$

Références:

- [GW] Gasquet-Witomski.
- [DW] Dalmasso-Witomski. (Exercices)