

Chemins dans un tableau arithmétique

Benoit Cloitre (25/06/2007)

Résumé

En considérant des « chemins » parcourant les cases d'un tableau arithmétique, nous visualisons des propriétés très simples des nombres premiers, et redécouvrons une suite fractale bien connue. D'autres considérations nous permettent de définir une transformation de suite qui sera développée autre part et nous mentionnons quelques travaux vaguement reliés.

Introduction

Dans l'encyclopédie en ligne des nombres entiers [1, A127093] se trouve un tableau, dû à Garry Adamson et que nous avons retrouvé en cherchant à localiser les diviseurs d'un entier. Ce tableau s'obtient très simplement en écrivant sur la 1^{ère} ligne les entiers strictement positifs, sur la 2^{ème} ligne les entiers espacés d'une case, sur la 3^{ème} ligne les entiers espacés de deux cases etc. Ce qui fait que sur la $n^{\text{ième}}$ ligne on trouve les entiers espacés de $(n-1)$ cases :

1	2	3	4	5	6	7	8
1		2		3		4	
1			2			3	
1				2			
1					2		
1						2	
1							2

Il a sans doute été utilisé pour la première fois par Euler [2] [3] (sous la forme de coefficients d'une famille de polynômes). Ce prolifique mathématicien en a déduit une formule pour la fonction « somme des diviseurs » en liaison avec son célèbre théorème « pentagonal ».

Conventions

Les cases vides sont considérées comme ayant la valeur 0. Dans la suite, $T(n,k)$ désigne la valeur de la case se trouvant à l'intersection de la ligne n et de la colonne k .

Par construction :

$$T(n,k) \neq 0 \Leftrightarrow k-1 \equiv 0 \pmod{n} \text{ et alors } T(n,k) = \frac{k-1}{n} + 1$$

Nous désignons par $P_{a,b}$ le pas qui partant de la case (x,y) mène directement sur la case $(x+a,y+b)$. Nous utiliserons parfois le tableau obtenu symétriquement par rapport à l'axe horizontal, voire les 2 à la fois.

1. Visualisation des diviseurs

Les diviseurs d'un entier n se trouvent tous en ordre décroissant sur la diagonale « sud-ouest » qui part de la case $(1,n)$.

Preuve :

Si on part de la case $(1,n)$ et que l'on suit la diagonale « sud-ouest », cela veut dire que l'on emprunte le chemin partant de $(1,n)$ et de pas $P_{1,-1}$. Au $i^{\text{ième}}$ pas, on est sur la case $(1+i, n-i)$. Les cases non nulles correspondent aux i tels que $i+1$ divise $n-i-1$. C'est à dire à tous les i tels que $i+1$ divise n . Sur ces cases, $T(1+i, n-i) = (n-i-1)/(i+1) + 1 = n/(i+1)$ et on visualise bien tous les diviseurs de n en ordre décroissant sur notre diagonale.

Exemple pour $n=12$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		2		3		4		5		6		7
1			2			3			4			5
1				2				3				4
1					2					3		
1						2						3
1							2					
1								2				
1									2			
1										2		
1											2	
1												2

2. Visualisation des nombres premiers

Grâce à ce qui précède, si une diagonale « sud-ouest » part de $(1,p)$ et ne rencontre que des cases vides avant de tomber sur un 1, alors p est un nombre premier.

Exemple pour $p=11$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		2		3		4		5		6		7
1			2			3			4			5
1				2				3				4
1					2					3		
1						2						3
1							2					
1								2				
1									2			
1										2		
1											2	
1												2

« NNE » (chemin jaune) :

Le cavalier atteint une case 2 sans jamais rencontrer d'entier $\Leftrightarrow 2n-3$ est un nombre premier

« NEE » (chemin bleu) :

Le cavalier atteint une case 4 sans jamais rencontrer d'entier $\Leftrightarrow n-3$ est un nombre premier

« NNO » (chemin vert) :

Le cavalier atteint 1 et ne rencontre jamais d'entier $\Leftrightarrow 2n-1$ est un nombre premier

« NOO » (chemin rouge) :

Le cavalier ne rencontre jamais d'entier $\Leftrightarrow n+1$ est un nombre premier

Preuve :

Les cas « NEE » et « NOO » sont des cas particuliers du théorème. Nous démontrerons uniquement le cas du chemin jaune vers le « NNE » de pas $P_{2,1}$, le cas du « NNO » est similaire. Au $i^{\text{ème}}$ pas $T(1+2i, n+i)=0$ veut dire que :

$$n+i-1 \not\equiv 0 \pmod{2i+1} \Leftrightarrow$$

$$2n+2i-2 \not\equiv 0 \pmod{2i+1} \Leftrightarrow$$

$$2n-3+2i+1 \not\equiv 0 \pmod{2i+1} \Leftrightarrow$$

$$2n-3 \not\equiv 0 \pmod{2i+1} \Leftrightarrow$$

aucun nombre impair autre que 1 et $2n-3$ ne divise $2n-3 \Leftrightarrow$

$2n-3$ est premier.

n\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1		2		3		4		5		6		7		8	
3	1			2			3			4						6
4	1				2				3							
5	1					2					3					4
6	1						2						3			
7	1							2								3
8	1															
9	1										2					

En notant $K(n)$ la valeur de cette case nous obtenons alors la suite :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$K(n)$	1	1	2	1	3	2	4	1	5	3	6	2	7	4

$K(n)$ a une structure fractale car en éliminant la première occurrence de chaque entier il reste la suite de départ. Elle satisfait la récurrence suivante :

$$K(2n)=K(n) \text{ et } K(2n+1)=n+1$$

Avant de le prouver, nous allons revenir sur le fameux problème de carte qui a vu cette suite émerger pour la première fois [1, A003602]. Elle a donné lieu à un article de Clark Kimberling et Shulz qui a fait date [4]. A propos de ces suites fractales, il convient de mentionner un autre article de Clark Kimberling [5] qui peut être considéré comme le père de ces suites d'entiers fractales, même si le concept de fractale en géométrie est bien antérieur (Koch, Mandelbrot,...).

Vous avez un tas de n cartes numérotées de 1 à n et placées sur une table A. Vous prenez la première carte du dessus du tas et vous la placez sous le tas. Vous prenez alors la suivante et vous la placez sur une table B. Itérez le processus jusqu'à avoir toutes les cartes dans un tas sur la table B. Une question que Schulz se posa fut de savoir en quelle position se trouvait la carte numérotée 1 dans le tas de la table B (cf. annexe 1 pour une illustration avec $n=3$). Il se trouve que c'est aussi la suite K .

Preuve :

Si une case est non nulle, cela veut dire que pour un i on a :

$$T(2i, n+1-i) \neq 0 \Rightarrow n-i \equiv 0 \pmod{2i}$$

Le i qui nous intéresse est le plus petit qui satisfait cette congruence. Si on écrit $n = 2^m(2k+1)$ et $i = 2^u(2v+1)$ on doit avoir :

$$2^m(2k+1) - 2^u(2v+1) \equiv 0 \pmod{2^{u+1}(2v+1)}$$

Cette égalité peut se diviser par 2^u :

$$2^{m-u}(2k+1) - (2v+1) \equiv 0 \pmod{2(2v+1)}$$

On a donc nécessairement $u=m$ car un nombre pair ne peut pas diviser un nombre impair. Comme c'est le plus petit qui nous intéresse on a $i=2^m$. Finalement :

$$K(n) = T(2^{m+1}, n+1-2^m) = \frac{2^m(2k+1) - 2^m}{2^{m+1}} + 1 = k+1$$

où $2k+1$ est la partie impaire de la factorisation de n , le plus grand diviseur impair de n . Cette suite est très connue [1, A000265].

$$\text{Comme } K(2n) = T(2^{m+2}, 2^{m+1}(2k+1)+1-2^{m+1}) = \frac{2^{m+1}(2k+1) - 2^{m+1}}{2^{m+2}} + 1 = k+1$$

On a bien $K(2n) = K(n)$ et il est facile de voir que $K(2n+1) = n+1$. Comme $K(1)=K(2)=1$, cette suite générée par notre cavalier est exactement celle de Schulz et Kimberling.

Le cavalier rencontre un dragon

Si, au lieu de la valeur exacte de la case atteinte par notre cavalier, on considère sa parité (1 si la valeur est impaire, 0 si elle est paire) alors on obtient la suite K' :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$K'(n)$	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0

Qui est la suite donnant la courbe du dragon [1, A014577] (cf. annexe 2 pour voir comment on la trace à partir de là et l'annexe 3 pour une représentation graphique différente).

Preuve : on a $K'(2n)=K(2n) \pmod{2} = K(n) \pmod{2} = K'(n)$ et :

$$K'(4n+1)=K(4n+1) \pmod{2} = 2n+1 \pmod{2} = 1$$

$$K'(4n+3)=K(4n+2+1) \pmod{2} = 2n+2 \pmod{2} = 0$$

Il s'agit bien de la récurrence de la suite A014577, à l'indice près.

Variantes : Si maintenant on considère la valeur atteinte par un cavalier qui part de $(2,n)$ et va en direction du « SSE », on obtient une suite qui commence par 1,0,2,2,3,2,4,... C'est une

sorte de complément de la suite de Shulz/Kimberling. Elle se confond pour $n \geq 3$ avec la suite [1, A103391] et est encore une suite fractale.

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1		2		3				5		6		7		8	
3	1			2			3			4			5			6
4	1				2								4			
5	1					2					3					4
6	1						2						3			
7	1							2								3
8	1															
9	1									2						

La preuve est similaire. De même, si on part de la case $(2, n)$ et qu'on utilise un « super cavalier » effectuant le pas $P_{2,-3}$ nous générons une suite fractale du même acabit qui est liée au jeu de Nim [1, A025480] et [5].

Un détour vers π : Il est facile de voir que la suite de Shulz/Kimberling peut se construire en partant de :

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12	
---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	---	--	----	--	----	--	----	--

Et en remplissant les « trous » avec la suite elle-même :

																							
1	1	2	1	3	2	4	1	5		6		7		8		9		10		11		12	
																							

Changeons un peu cette règle de remplissage en introduisant une suite $a(k)$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$a(k)$	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14

On remplit alors les « trous » (toujours de manière auto-référente) en appliquant itérativement :

« le $a(n)$ ^{ième} nouveau trou est rempli par $a(n)$ »

Ainsi, si $n=1$ on a « le $a(1)^{\text{ième}}$ nouveau trou est rempli par $a(1)$ » soit « le premier trou est rempli par 1 » :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$a(k)$	1	1	2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14

Pour $n=2$, « le $a(2)^{\text{ième}}$ nouveau trou est rempli par $a(2)$ » \Rightarrow « le premier nouveau trou est rempli par 1 » :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$a(k)$	1	1	2	1	3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14

$n=3$, « le $a(3)^{\text{ième}}$ nouveau trou est rempli par $a(3)$ » \Rightarrow
« le second nouveau trou est rempli par 2 » :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$a(k)$	1	1	2	1	3		4	2	5		6		7		8		9		10		11		12		13		14

En continuant de la sorte on obtient :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$a(k)$	1	1	2	1	3	1	4	2	5	1	6	1	7	3	8	2	9	1	10	4	11	1	12	2	13	5	14

Si on considère maintenant les indices k des trous remplis par des 1, on a :

$$k=1,2,4,6,10,12,18,22,\dots$$

Et si on note f la suite de ces k alors on a :

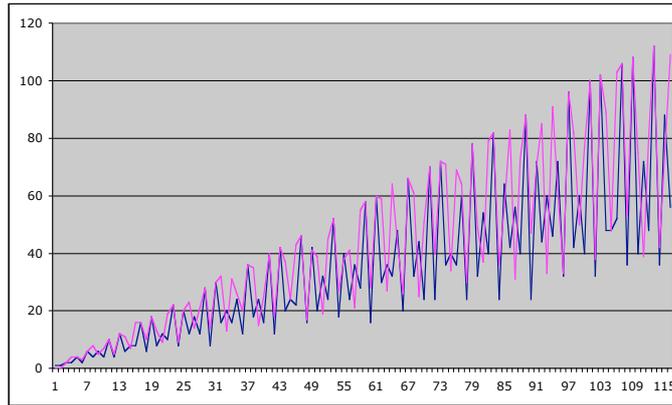
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{f(n)} = \pi$$

Morceau de preuve : Cette suite est bien connue [1, A002491] . On peut montrer que ceci équivaut au crible décrit en section 6 à <http://arxiv.org/abs/math.CO/9502225>. Miraculeusement, ce procédé est en effet équivalent à une autre méthode de remplissage.

8. Chemins à pas variable

Il est possible de considérer des chemins à pas variable. Comme dans cet exemple facile, le chemin à pas « triangulaire » : $(x,y) \rightarrow (x+1,y-1) \rightarrow (x+2,y-1-2) \rightarrow (x+3,y-1-2-3)$ etc. Partant de la case (x,y) le $i^{\text{ème}}$ pas mène sur la case $(x+i,y-i(i+1)/2)$.

Ce chemin partant d'une case $(1,n)$ ne rencontre jamais d'entier si et seulement si n est de la forme 2^k+1 .

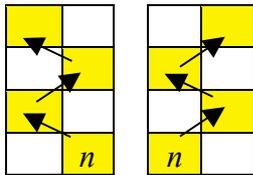


G (en rouge) n'atteint pas tous les entiers pairs. Par exemple 58 n'est pas atteint. Comme pour la suite [1, A005277] liée à la fonction « totient » d'Euler, on peut même conjecturer qu'une infinité de nombres pairs ne sont pas dans l'image de G .

Sachant que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2}$, on peut aussi imaginer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n G(k)$ existe et s'interroger sur la valeur de cette limite.

10. Chemins « zigzags » partant de (1,n)

Ces 2 zigzags ne rencontrent aucun entier $\Leftrightarrow n$ est un nombre de la forme 2^m+1



Preuve pour celui de gauche :

$\forall i \geq 1, T(1+i, n-i \bmod 2) = 0 \Leftrightarrow n-i \bmod 2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{i+1}$. En prenant $i+1=p$ un nombre premier impair quelconque, nous voyons que $n-1$ ne peut avoir que 2 en facteur premier.

Les (a,b)_zigzags

Soit a un entier fixé (non congru à zéro modulo 4) et b un entier (non congru à 1 modulo 4), avec $b > a$ alors le (a,b)_zigzag illustré ci-après évite tout entier dans le tableau si il part d'un n appartenant à une suite qui ne dépend que de a . Voici quelques « a »_suites qui ont été calculées jusqu'à 500 :

- a=1 : 4, 8, 20, 32, 68, 80, 104, 128, 164, 200, 212, 272, 464, 488, 500
- a=2 : 4, 12, 24, 60, 72, 84, 108, 168, 180, 192, 228, 240, 264, 312, 348, 420, 432, 444, 480, 492
- a=3 : 8, 24, 32, 48, 72, 80, 104, 128, 168, 192, 200, 224, 272, 312, 360, 368, 384, 440, 464, 480,
- a=4 : pas de suite
- a=5 : 4, 12, 48, 60, 132, 228, 240, 252, 384, 420, 432
- a=6 : 8, 12, 20, 24, 32, 48, 60, 68, 80, 84, 104, 108, 132, 140, 152, 164, 168, 180, 192, 200, 224, 228, 252, 264, 272, 284, 308, 312, 332, 348, 360, 368, 384, 420, 440, 444, 480, 488, 500
- a=7 : 4, 20, 44, 68, 140, 164, 212, 284, 308, 332, 380
- a=8 : pas de suite
- a=9 : 8, 12, 24, 32, 44, 60, 72, 108, 128, 140, 152, 192, 200, 224, 252, 264, 284, 312, 332, 348, 380, 444, 480, 492
- a=10 : 4, 8, 20, 32, 44, 80, 104, 128, 140, 164, 212, 224, 272, 284, 308, 368, 380, 440, 500

11. La transformation matricielle inverse

Nous définissons une transformation de suite, basée sur notre tableau infini, et qui constitue en soi un sujet d'étude.

Soit f une fonction de N dans R et $M(n)$ la matrice carrée $n \times n$ où les entiers k de notre tableau sont remplacés par $f(k)$ i.e. pour $n=5$:

$$M(5) = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) \\ f(1) & 0 & f(2) & 0 & f(3) \\ f(1) & 0 & 0 & f(2) & 0 \\ f(1) & 0 & 0 & 0 & f(2) \\ f(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si pour tout n $M(n)$ est inversible alors il existe une fonction g de N dans R telle que :

$$M(\infty)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ g(1) & g(2) & g(3) & g(4) & \dots \\ 0 & g(1) & 0 & g(2) & \dots \\ 0 & 0 & g(1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

La preuve est omise et fera partie d'un article à venir. Nous appelons g la transformée matricielle inverse de f .

Quelques cas particuliers que le lecteur peut vérifier :

$$f(k) = 1 \Rightarrow g(n) = \mu(n) \text{ la fonction de Moebius.}$$

$$f(k) = (-1)^k \Rightarrow g(1) = 1 \text{ et } g(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>1}} (-1)^d g(n/d)$$

12. La matrice de Redheffer

Nous mentionnons cette matrice pour la culture, car ces coefficients sont distribués un peu comme dans notre tableau et qu'elle nous a inspiré pour un futur article. En 1977 Redheffer [7] a noté que le déterminant de la matrice $n \times n$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

où le terme $r(i,j)=1$ si i divise j ou $j=1$ et $r(i,j)=0$ autrement, valait :

$$\det = \sum_{k=1}^n \mu(k).$$

En travaillant sur les valeurs propres, Redheffer pensait alors pouvoir majorer la valeur absolue du déterminant et donc démontrer la conjecture de Riemann. Celle-ci est en effet équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{k=1}^n \mu(k) = O(n^{1/2+\varepsilon}).$$

Malheureusement ça n'a pas été possible ni là ni après [8] et la dernière approche n'a pas encore permis de le faire [9]. Dans [10] nous étudions une autre matrice qui n'est pas composée uniquement de 0 et de 1 mais dont le déterminant permet d'avoir la somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k}$$

Notre prétention est moindre vu qu'on peut à la rigueur essayer de retrouver le TNP.

Conclusion

Il est loisible d'inventer de nombreux problèmes de chemins dans ce tableau. Nous espérons que les amateurs de suites d'entiers y trouveront matière pour en créer de nouvelles, et alimenter la fabuleuse encyclopédie en ligne [1].

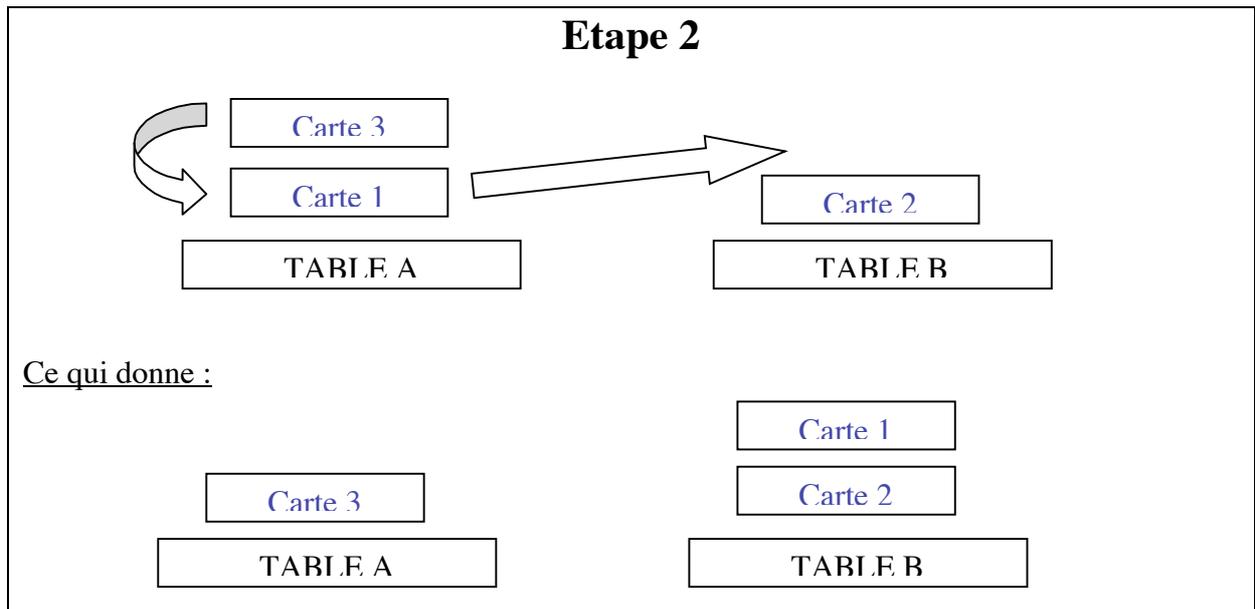
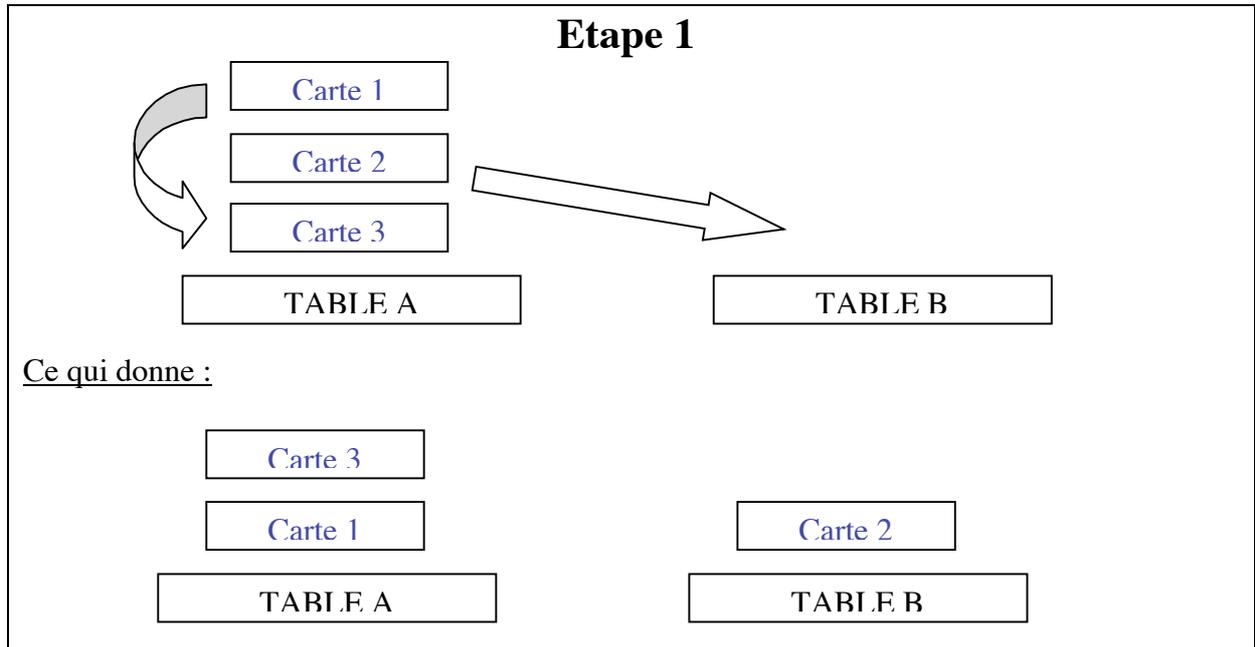
Remerciements

L'auteur remercie Jean-Paul Delahaye pour ses encouragements constants et Clark Kimberling pour les échanges au sujet des suites d'entiers fractales.

Bibliographie et sitographie

- [1] N.J.A. Sloane, On Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at :
<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>
- [2] L. Euler, Opera Omnia : Series 1, Volume 3, pp. 480 - 496
- [3] Robert M. Young, Excursions in Calculus, An Interplay of the Continuous and the Discrete, MAA, p.366, (1992).
- [4] C. Kimberling and Harris S. Shultz, "Card sorting by Dispersions and Fractal Sequences", Ars Combinatoria 53, pp. 209-218, (1999).
- [5] C. Kimberling, "Fractal Sequences and Interpersions", Ars Combinatoria 53, pp. 157-168, (1997).
- [6] L. Levine, Fractal sequences and restricted Nim, Ars Comb., Ars Combin. 80 (2006), 113-127.
- [7] R. M. Redheffer, Eine explizit asbare Optimierungsaufgabe, Internat. Schriftenreihe Numer. Math. 36 (1977).
- [8] R. C. Vaughan, On the eigenvalues of Redheffer's matrix, II, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 60 (1996), no. 2, 260-273.
- [9] H. S. Wilf., The Redheffer matrix of a partially ordered set, Journal of combinatorics, vol 11, n°4, pages R10,(2004).
- [10] O. Bordellès et B. Cloitre, Un déterminant lié à la fonction de Moebius, en préparation, (2007).

Annexe 1



La dernière étape évidente donne finalement un tas sur la table B où la carte numérotée 1 se trouve en 2^{ème} position en partant du dessus, soit $K(3)=2$

Annexe 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$K'(n)$	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0

Partons d'un segment de longueur donnée fixe : on vire à droite avec un segment de même longueur si on passe par 0 et on vire à gauche si on passe par 1.

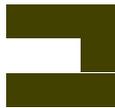
On commence par :



Le premier terme de la suite vaut 1, on vire donc à gauche :



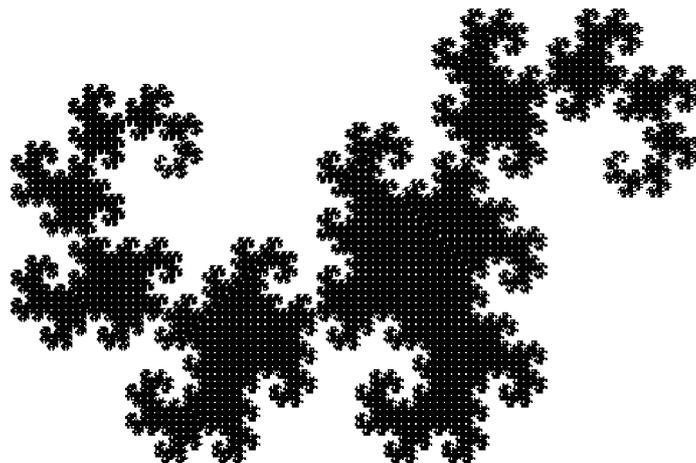
Puis 1 impose de virer encore à gauche :



0 impose de virer à droite :



En poursuivant le processus indéfiniment on arrive à une courbe qui ressemble à ça :



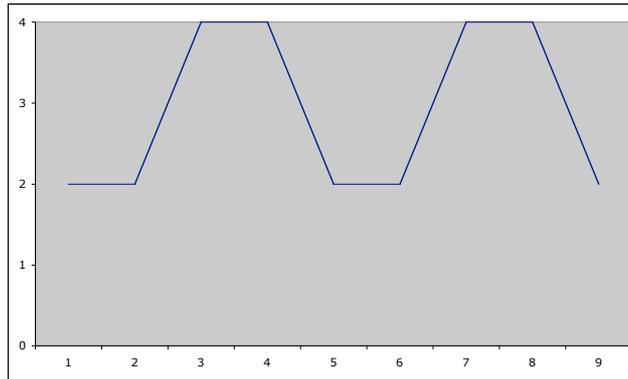
Annexe 3

Les montagnes du Dragon

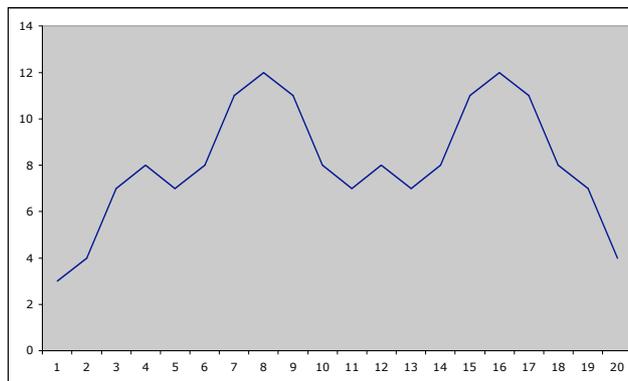
$$F_m(n) = n^2 + mn - 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i K'(j)$$

Voici les graphes de $F_m(n)$ pour m fixé et n dans l'intervalle tel que $F_m(n) \geq 0$

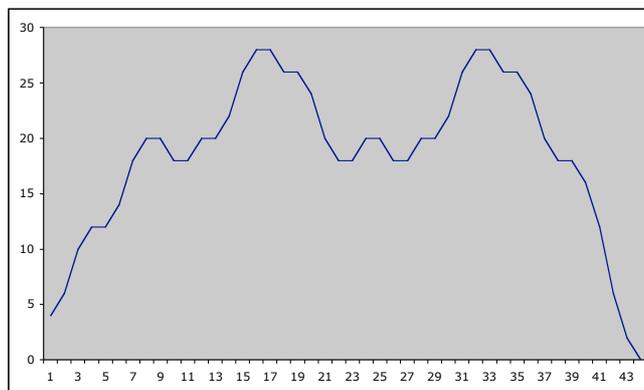
$m=5$ et $1 \leq n \leq 9$



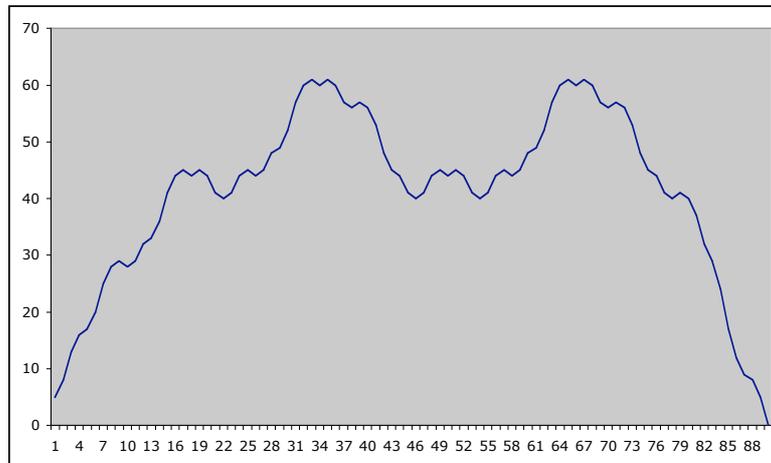
$m=6$ et $1 \leq n \leq 20$



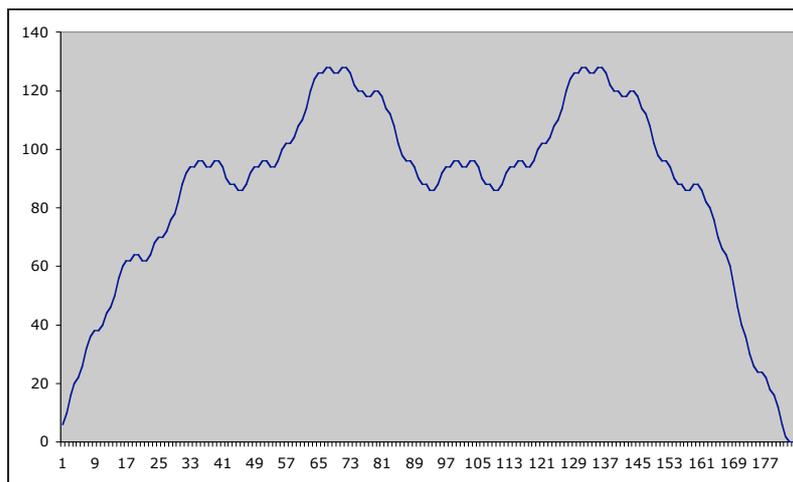
$m=7$ et $1 \leq n \leq 44$



$m=8$ et $1 \leq n \leq 90$



$m=9$ et $1 \leq n \leq 184$



$m=10$ et $1 \leq n \leq 372$

