Université de Montpellier II

Agrégation de Mathématiques
(2005-2006)

Intégration

Jérôme Droniou [1].

Exercice 1 * Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des $x \in X$ tels que $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge est mesurable.

Exercice 2 * Soit $f : X \to [0,\infty]$ intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si E est mesurable de mesure inférieure à δ, alors $\int_E f < \varepsilon$ *(on pourra commencer par le cas où f est une fonction simple)*. Peut-on choisir δ indépendant de f (ne dépendant que de ε et de la mesure considérée)?

Exercice 3 Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue. Montrer que pour tout $c \in [0,\mu(A)]$, il existe $B \subset A$ tel que $\mu(B) = c$ *(considérer la fonction $t \to \mu(A \cap [0,t])$)*.

Exercice 4 Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable *de mesure non-nulle*. On veut montrer que A contient un ensemble non-mesurable (non *Lebesgue*-mesurable).

i) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $A \subset [0,1]$. C'est ce qu'on supposera dans la suite.

ii) On définit sur $\mathbb{R}$ une relation d'équivalence par $x \sim y$ si $x-y \in \mathbb{Q}$. Soit E un sous-ensemble de $[0,1]$ contenant exactement un et un seul représentant de chaque classe d'équivalence pour cette relation *(remarquez que l'on utilise ici l'axiome du choix pour s'assurer qu'un tel E existe)*. Montrer que les ensembles $(E+r)_{r\in\mathbb{Q}}$ sont deux à deux disjoints.

iii) On pose, pour $r \in \mathbb{Q}$, $A_r = A \cap (E+r)$. Montrer que $A = \cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} A_r$.

iv) Prenons $r \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]$ tel que A_r soit (Lebesgue-)mesurable. Montrer alors que, pour tout $t \in \mathbb{Q}$, $A_r + t$ est mesurable, que $\mu(A_r+t) = \mu(A_r)$ et que $\bigsqcup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}(A_r+t) \subset [-1,3]$. En déduire que $\mu(A_r) = 0$ *(μ est bien sur la mesure de Lebesgue)*.

v) Déduire de iii) et iv) que A contient un ensemble non-mesurable.

Exercice 5 *(Grosse subtilité de mesurabilité... déjà mentionnée en cours)* On munit $I = [0,1]$ de sa σ-algèbre des *Lebesguiens* $\mathcal{L}$. Trouver un homéomorphisme $f : ([0,1],\mathcal{L}) \to ([0,1],\mathcal{L})$ qui ne soit pas mesurable (!) *(on pourra considérer un homéomorphisme entre un Cantor gras et un Cantor de mesure nulle — de tels homéomorphismes ont étés construits dans la feuille sur la topologie — et utiliser l'exercice 4)*. Qu'est-ce que cela signifie?

Exercice 6 *(Théorème d'Egoroff)* Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un ensemble mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $X \backslash A_\varepsilon$ *(on pourra commencer par constater que $\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq 1/k\} = \emptyset$ pour tout $k \geq 1$ et prendre N_k tel que $\mu(\bigcup_{n\geq N_k}\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq 1/k\}) < \varepsilon/2^k$)*.

[1] Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. email: `droniou@math.univ-montp2.fr`

Exercice 7 *(Théorème de Vitali)* Soit X de mesure finie et $f_n : X \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers f. Montrer que $f_n \to f$ dans $L^1(X)$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable, c'est à dire: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que, $\forall n \geq 1$, $\forall A$ vérifiant $\mu(A) < \eta$ on a $\int_A |f_n|\, d\mu < \varepsilon$ *(on pourra recycler les exercices 2 et 6)*.

Exercice 8 * Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

- pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, x) \in C^1(I)$,
- $\sup_{t\in I} |\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot)| \in L^1(\mathbb{R})$.

On se donne $a, b : I \to \mathbb{R}$ dérivables. Calculer la dérivée, si elle existe, de $t \in I \to \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x)\, dx$.

Exercice 9 * Montrer que, si $p \in [1, \infty[$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable. Pouvez-vous trouver un espace $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré tel que $L^1(X)$ ne soit pas séparable?

Exercice 10 *

i) Quelles sont les inclusions générales entre $L^p(X)$ et $L^q(X)$ *(le résultat dépend de la finitude de la mesure de X)*.

ii) Soit $f : X \to [0, \infty]$ mesurable. On prend $(r, s) \in [1, \infty]$, $\theta \in [0, 1]$ et p tel que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}$. Montrer que $p \in [1, \infty]$ et que $||f||_p \leq ||f||_r^\theta ||f||_s^{1-\theta}$ *(on pourra avoir intérêt à écrire $f = f^\theta f^{1-\theta}$)*. En déduire que, pour tout q compris entre r et s, $L^q \subset L^r \cap L^s$.

Exercice 11 Soit $f : X \to [0, \infty]$ mesurable; on suppose que $||f||_{p_0} < \infty$ pour un certain $p_0 < \infty$. Montrer que $||f||_p \to ||f||_\infty$ lorsque $p \to \infty$.

Exercice 12 * Décrire les cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder.

Exercice 13 Soit F un fermé de $\mathbb{C}$ et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On suppose que, pour tout A mesurable de mesure strictement positive, $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu \in F$; montrer alors que $f \in F$ presque partout. La réciproque est-elle vraie? Sinon, quelle hypothèse ajouter à F?

Exercice 14 Soient A et B deux ensembles mesurables dans $\mathbb{R}$ de mesure strictement positive et finie. Montrer que $\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B$ est une fonction continue non-nulle et en déduire que $A + B$ contient un intervalle. En quoi est-ce surprenant?

Exercice 15 Soit $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculer $f_1 * f_n$ explicitement. Calculer $g_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\mathcal{F}(g_n) = f_1 * f_n$ *(on pourra commencer par chercher h_n telle que $\mathcal{F}(h_n) = f_n$)*; montrer que $||g_n||_{L^1(\mathbb{R})} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, alors que $||f_1 * f_n||_\infty \leq 1$. En déduire, grâce au Théorème d'isomorphisme de Banach, que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ (fonctions continues tendant vers 0 à l'infini) n'est pas surjective.

Exercice 16 Résoudre $f * f = f$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. En déduire que la convolution n'a pas d'élément neutre dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 17 Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on pose $L(f)(x) = f''(x) + xf(x)$.

i) Montrer que $L(f) = 0$ implique $f = 0$.

ii) Montrer que, si $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'équation $h'(\xi) = k(\xi)$ a une solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int_\mathbb{R} k(\xi)\, d\xi = 0$.

iii) Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Etudier l'existence et l'unicité de solutions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L(f) = g$.

Exercice 18 Soit $k > N/2 + l$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $(1+|\cdot|^2)^{k/2} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $f \in C^l(\mathbb{R}^N)$ *(on pourra commencer par $l = 0$ en constatant que $(1 + |\cdot|^2)^{-k/2} \in L^2(\mathbb{R}^N)$)*.