Théorème 1 *Si K est un compact de E, alors toute fonction f continue de K dans F est uniformément continue sur K.*

Démonstration. Supposons la fonction f non uniformément continue sur K. Il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ et des suites $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ dans K telles que $\|x_n - y_n\| < \dfrac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Avec la compacité de K, on peut extraire deux suites $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\geq 1}$ qui convergent respectivement vers x et y dans K. Mais avec $\|x_n - y_n\| < \dfrac{1}{\varphi(n)} \leq \dfrac{1}{n}$, on déduit que $\|x - y\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right\| = 0$, soit $x = y$ et avec la continuité de f on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right\| = 0$ en contradiction avec $\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right\| > \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. ■

Comme première application de ce résultat, on peut montrer que toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux.

De manière plus précise, soit f continue sur $[a, b]$. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit une subdivision de $[a, b]$ en notant :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

et à cette subdivision on associe la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)$$

(f_n coïncide avec f aux x_k et est affine sur $[x_k, x_{k+1}]$). Cette fonction est affine par morceaux et continue sur $[a, b]$.

Lemma 2 *La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Démonstration. La fonction f continue sur le compact $[a, b]$ y est uniformément continue, donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que si x, y dans $[a, b]$ sont tels que $|x - y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Pour tout entier $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$ et tout entier k compris entre 0 et $n-1$ on a alors $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n} \leq \eta$. Sachant qu'un réel $x \in [a, b]$ est dans l'un des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on obtient pour $n \geq \dfrac{b-a}{\eta}$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left|f(x) - f(x_k) - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)\right| \\
&\leq |f(x) - f(x_k)| + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| \\
&\leq \varepsilon + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\varepsilon \leq 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, b]$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f. ■

Ce résultat peut être utilisé pour prouver, sans théorie de l'intégration, que toute fonction f continue sur un intervalle compact admet une primitive.

On vérifie tout d'abord qu'une fonction affine par morceaux et continue sur $[a, b]$ admet une primitive, ce qui n'est pas difficile.

Si, avec les notations qui précèdent, on désigne pour tout $n \geq 1$ par F_n la primitive de f_n nulle en a, on constate que la suite $(F'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f et que la suite $(F_n(a))_{n\geq 1}$ converge vers 0. On déduit alors du théorème **??** page **??**, que la suite $(F_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction dérivable F et que $F' = f$, c'est-à-dire que F est une primitive de f sur $[a, b]$.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur cet intervalle.