



TUTORIAL

PATRICK ETYNGIER

Ecole Supérieure d'Informatique - Electronique - Automatique

JUIN 2003

Introduction intuitive à la géométrie projective *Version 1.0*

Réalisé dans le cadre des TPED (projets de fin d'études) *mosaïcage d'images et 3D à partir d'un flux video* encadrés par

LAURENT BEAUDOIN
ROBERT ERRA

Docteur ENST et professeur ESIEA
Docteur Université de Rennes et professeur ESIEA

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	4
2	La stratification de la géométrie	6
2.1	La géométrie euclidienne	6
2.2	La couche métrique	7
2.3	La couche affine	7
2.4	La géométrie projective	9
2.5	Résumé	11
3	Modèle mathématique de la géométrie projective	13
3.1	Vers les coordonnées homogènes	13
3.2	Correspondance entre les coordonnées classiques et homogènes . . .	13
3.3	Et les points à l'infini ?	14
3.4	Définitions et propriétés en dimensions 2	15
3.4.1	Points, lignes et principe de dualité	15
3.4.2	Calculs sur les points et les droites	15
3.4.3	Coniques et coniques duales	16
3.4.4	La droite à l'infini & points absolus	16
3.4.5	Homographies et transformations projectives	17
3.4.6	Rapport harmonique et formule de Laguerre	17
3.5	Conclusion	19
4	Exemples de simulations Matlab	20
4.1	Du plan projectif au plan affine	20
4.1.1	Description	20
4.1.2	Formulation mathématique	21
4.1.3	Mise en oeuvre et résultats	22
4.2	Du plan projectif au plan euclidien	24
4.2.1	Description	24
4.2.2	Formulation mathématique	24
4.2.3	Mise en oeuvre et résultats	25

5	Pour aller plus loin	28
	Bibliographie	28

TABLE DES FIGURES

1.1	Photographie d'une table carrée	5
2.1	Les transformations possibles dans un espace euclidien	7
2.2	Exemple de transformation métrique	8
2.3	Exemple de transformation affine d'un cube	8
2.4	Une représentation du plan projectif	10
2.5	Droite à l'infini en dehors de sa position canonique	10
2.6	Un exemple d'image en représentation projective	11
2.7	Exemple d'un cube dans un espace projectif	12
2.8	La stratification de la géométrie	12
3.1	Le principe de dualité	15
3.2	Une conique à gauche et son dual à droite	16
3.3	Droite projective et plan projectif	18
3.4	Le rapport harmonique en espace euclidien	18
3.5	Rapport harmonique de 4 droites et formule de Laguerre	19
4.1	Le modèle perspectif de la caméra	21
4.2	Identification de point à l'infini et de la droite à l'infini	22
4.3	Exemple de recalage affine	23
4.4	Exemple de recalage euclidien	27

CHAPITRE 1

Introduction

La vision humaine est un sens bien complexe à reproduire artificiellement. La mise en correspondance des images reçues par les yeux, est certes, une étape nécessaire, mais non suffisante puisque la connaissance à priori de l'objet fixé joue un rôle essentiel. Sans entrer dans les détails de la conception mentale des objets, prenons un exemple. La figure 1.1 est une photo d'une table carrée dont les bords ont été surlignés en rouge. Il apparaît clairement que le quadrilatère formé par le contour de la table sur le plan de l'image n'est pas un carré. Pourtant, sans cette dernière remarque, nul n'aurait douté un seul instant que la table ne fût point un carré. C'est le cerveau qui grâce à une connaissance à priori (fondée sur l'expérience de la vision) interprète la table comme étant carrée. La vision humaine provoque les mêmes distorsions, mais nous y sommes tellement habitués que nous n'y prêtons pas attention.

La déformation des objets au travers d'une photographie, ou même de la vision humaine provient de la projection de l'objet en dimension 3 vers son image en dimension 2. Afin d'étudier la vision par ordinateur, la géométrie projective est un outil indispensable qui fait appel à des concepts mathématiques parfois difficilement représentables. L'objet de ce chapitre est de fournir une introduction à la géométrie projective par des approches intuitives, partant de connaissances de base en géométrie classique euclidienne. Les exemples traités seront en dimension 2 et 3. Pour une description plus complète de la géométrie projective appliquée à la vision par ordinateur, on se dirigera vers [Fau03], [Pol99], [Bir98]

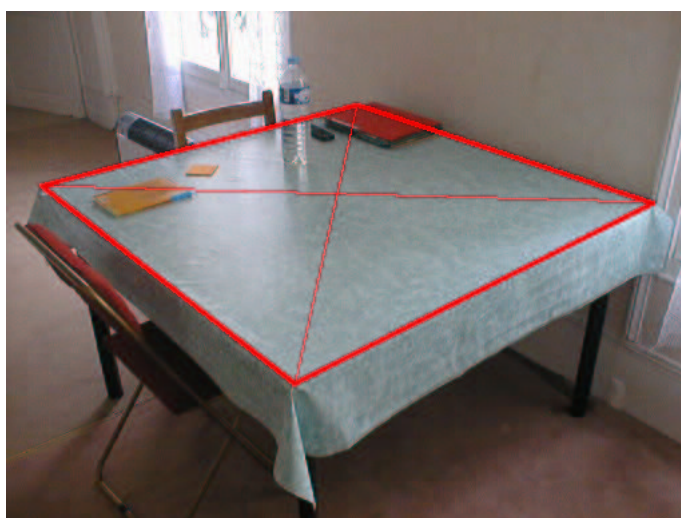


FIG. 1.1 – Photographie d'une table carrée

CHAPITRE 2

La stratification de la géométrie

La géométrie se subdivise en plusieurs couches et pour chacune d'entre-elle, est associé un groupe de transformations possibles. Les couches euclidienne, métrique, affine et projective seront étudiées dans les lignes suivantes.

SECTION 2.1

La géométrie euclidienne

En déplaçant un objet non déformable dans son environnement comme par exemple une chaise, il est possible de lui faire subir uniquement des composées de translations dans trois directions, ainsi que des composées de rotations autour de ces trois directions tel que représenté dans la figure 2.1. Tout déplacement réalisable "physiquement dans la réalité" sur cet objet est une transformation qui correspond au groupe euclidien et l'environnement dans lequel nous évoluons peut donc ainsi être décrit comme "euclidien".

Mathématiquement, ces transformations dites *transformations rigides* s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où $\sigma = 1$ dans ce cas et $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

Le vecteur $[t_x, t_y, t_z]^T$ permet de constituer une combinaison des translations de l'objet dans les trois directions de l'espace euclidien. La matrice R représente une combinaison des rotations de l'objet autour des trois directions de l'espace euclidien. Rappelons que les matrices de rotations ont des propriétés particulières quant à leur structure. Une matrice de rotation est un endomorphisme tel que $RR^T = 1$ et $\det R = 1$

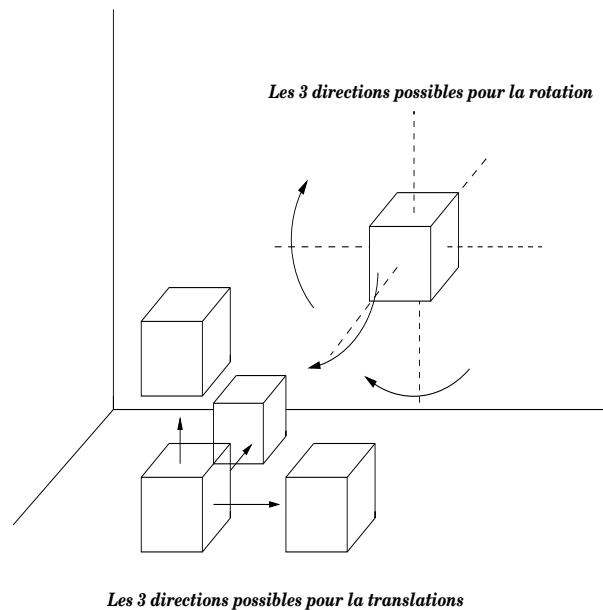


FIG. 2.1 – Les transformations possibles dans un espace euclidien

SECTION 2.2

La couche métrique

La couche métrique est très similaire à la couche euclidienne vue ci-dessus. Ses transformations possèdent un degré de liberté supplémentaire puisque les distances absolues ne sont plus nécessairement conservées. Cependant la figure 2.2 montre que les distances relatives sont conservées : un cube reste un cube dans une transformation du groupe métrique, mais sa taille peut varier. Cela reviendrait à avoir la possibilité de pouvoir modifier la taille de notre chaise, en plus de pouvoir lui appliquer des translations et des rotations.

Mathématiquement, les transformations de ce groupe s'écrivent de la même manière que dans l'équation 2.1 avec σ quelconque.

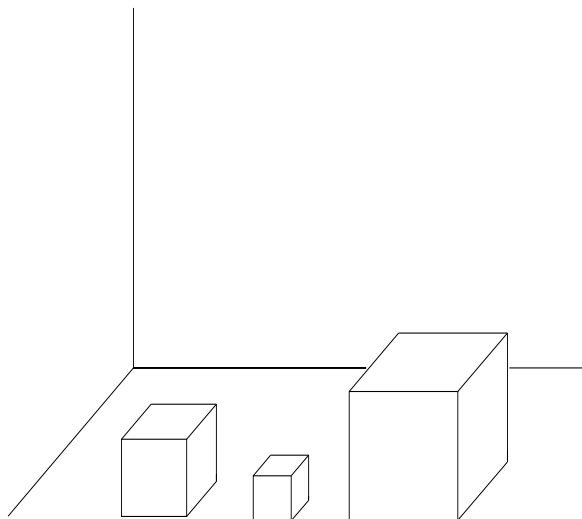
La couche euclidienne est donc incluse dans la couche métrique.

SECTION 2.3

La couche affine

L'espace affine est un espace dans lequel les contraintes sont moins importantes que dans l'espace métrique et dans lequel les transformations obtiennent des degrés de liberté supplémentaire. Il est plus général que l'espace métrique car les transformations affines n'y imposent plus la conservation des angles. Ainsi, le cube des figures 2.1 et 2.2 pourra devenir un des rhomboèdres¹ de la figure 2.3 au travers d'une transformation de l'espace affine. Mathématiquement, ces transformations s'écrivent :

¹Le Grand dictionnaire de Larousse donne la définition suivante : Rhomboèdre : Parallélépipède dont les six faces sont des losanges égaux



Un nouveau degrés de liberté dans l'espace métrique

FIG. 2.2 – Un nouveau degré de liberté pour les transformations possibles dans un espace métrique

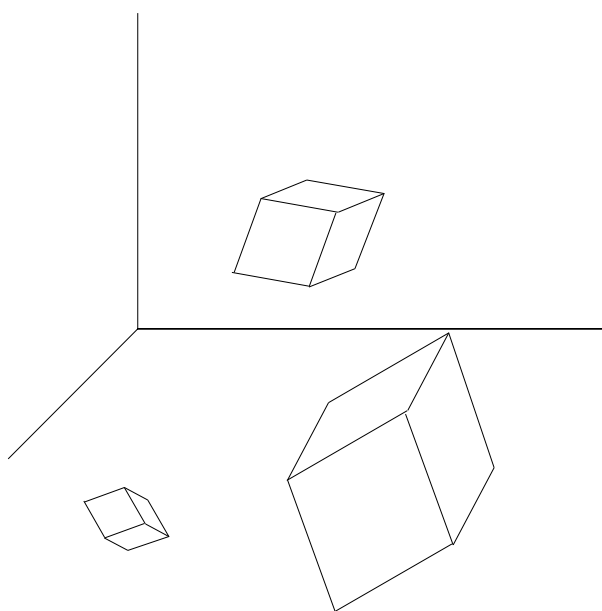


FIG. 2.3 – Exemple de transformation affine d'un cube

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ et } \det A \neq 0$$

On en déduit que la couche métrique est incluse dans la couche affine.

SECTION 2.4

La géométrie projective

La dernière couche géométrique étudiée dans ce document comporte encore plus de degrés de liberté que la couche affine. En effet, les transformations des différentes couches évoquées ci-dessus conservaient le parallélisme alors que ce n'est pas toujours le cas pour les transformations de la couche projective. Lorsqu'on trace deux droites parallèles dans le plan affine, métrique ou euclidien, les deux droites ont la particularité de ne jamais se couper. Il est cependant vrai que certains ouvrages préciseront parfois que les droites se coupent à l'infini. Dans un tel cas, l'auteur se place déjà dans un contexte de géométrie projective. Par exemple, supposons un plan affine (de dimension 2) contenant deux droites parallèles. Ces deux droites se coupent en un point que l'on appellera à l'infini. Ce point, ne fait pas parti du plan affine. Prenons à présent deux autres droites parallèles dans une direction autre. Leur point d'intersection définit un nouveau point à l'infini qui n'appartient pas lui non plus au plan affine. En parcourant ainsi toutes les directions possibles, on peut définir une sorte de cercle de rayon infini autour du plan affine, comme représenté dans la figure 2.4. Ce cercle est appelé droite à l'infini.

Dans cette dernière figure, les deux droites tracées sont parallèles dans le plan affine et se coupent en un point à l'infini sur la droite à l'infini. Un point dit à l'infini sera donc un point où converge toutes les droites parallèles dans une même direction. Notons, que les points diamétralement opposés $S1$ et $S2$ représentent le même point dans le plan projectif. Ce point ($S1$ ou $S2$, désormais désigné par S) est un point à l'infini où se coupent les deux parallèles ainsi que toutes les autres de même direction.

Dans la figure 2.4 la droite à l'infini est dans sa position dite canonique, c'est à dire qu'elle se trouve "effectivement à l'infini". Cependant, les transformations projectives ont la particularité de ne pas conserver cette droite à l'infini dans sa position canonique. On est alors en droit de se demander ce que deviendraient les deux droites parallèles de la figure 2.4 si une transformation projective venait à positionner la droite à l'infini dans le plan affine.

Les deux droites parallèles doivent toujours se croiser au point à l'infini S . On commence alors à pressentir la problématique posée par la géométrie projective, puisque si le point S venait à se positionner dans le plan affine, les deux droites ne seraient plus parallèles au sens où nous l'entendons de manière commune. Puisque des droites parallèles sont définies comme convergentes vers un point à l'infini, les deux droites restent parallèles mais leur représentation projective (Voir figure 2.5) ne le met pas en évidence. Le phénomène est bien connu des dessinateurs puisque la réalisation d'une vue en perspective impose de définir un point de fuite (*vanishing point* en anglais). Ce point de fuite n'est rien d'autre qu'un point à l'infini se retrouvant dans le plan affine à la suite de la projection (en perspective) du modèle en 3 dimensions sur une plan en

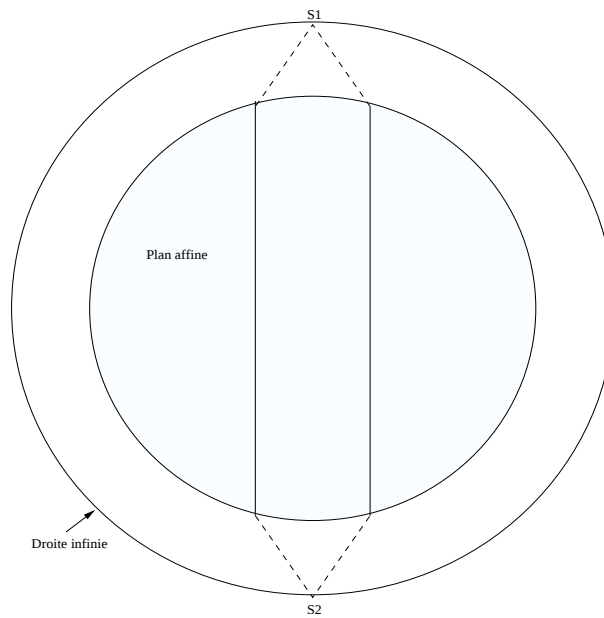


FIG. 2.4 – Une représentation du plan projectif

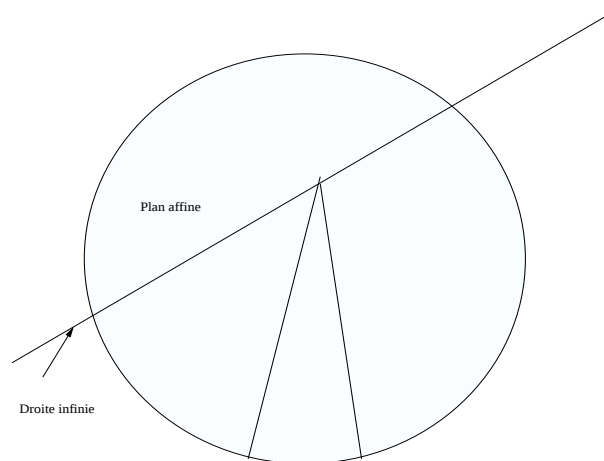


FIG. 2.5 – Représentation du plan projectif avec la droite à l'infini en dehors de sa position canonique



FIG. 2.6 – Un exemple d'image en représentation projective

dimensions 2. Dans l'opération de projection, toutes les droites parallèles ne peuvent malheureusement pas rester parallèle et au moins un point à l'infini se retrouve dans le plan affine. La droite à l'infini n'est alors plus dans sa position canonique puisqu'il existe au moins un point à l'infini qui n'est pas "effectivement à l'infini"

Un exemple courant dans les ouvrages de perspective [Par] est celui de la voie ferrée. La figure 2.6 met en évidence que les rails convergent au milieu de l'image vers un point de fuite. Ce point de fuite est un point à l'infini où convergent tous les droites parallèles d'une même direction. C'est une connaissance à priori fondée sur notre propre expérience qui permet de déduire que les rails sont bien parallèles.

La figure 2.7 montre le cas du cube en représentation projective. Les arêtes ne sont plus parallèles dans cette représentation et leur point d'intersection sont des points à l'infini qui définissent le plan à l'infini de l'espace projectif en question. Enfin, la représentation mathématique des espaces projectifs est différente de celle des espaces euclidien, métrique ou affine. Le modèle mathématique ne sera donc pas présenté dans cette partie.

SECTION 2.5

Résumé

La géométrie au sens large peut se subdiviser en 4 sous-ensembles, les uns inclus dans les autres. Pour chaque ensemble un groupe de transformation est associé permettant ainsi de différencier chacun d'entre eux. Comme on peut le voir dans la figure 2.8 la géométrie Euclidienne est incluse dans la géométrie métrique, elle-même incluse dans la géométrie affine, et enfin elle-même incluse dans la géométrie projective. Ces inclusions proviennent directement des degrés de liberté accordés à chaque groupe de transformation. Dans les sections suivantes nous montrerons qu'il est possible de passer d'un espace projectif à un espace affine puis à un espace Euclidien.

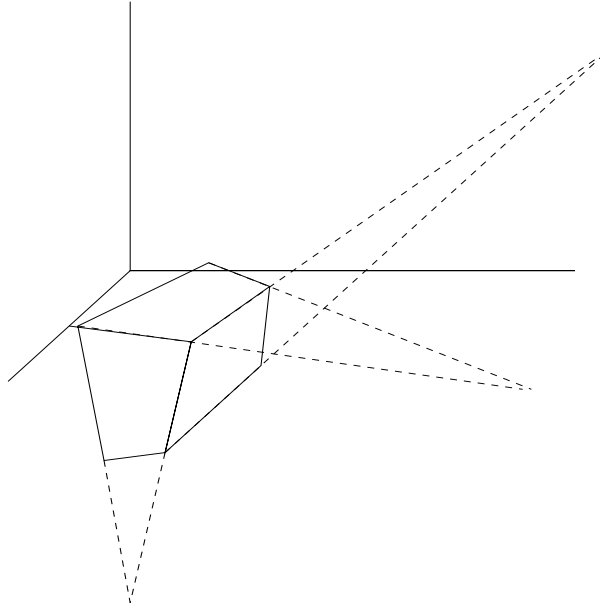


FIG. 2.7 – Un cube dans un espace projectif n’ayant pas son plan à l’infini dans sa position canonique

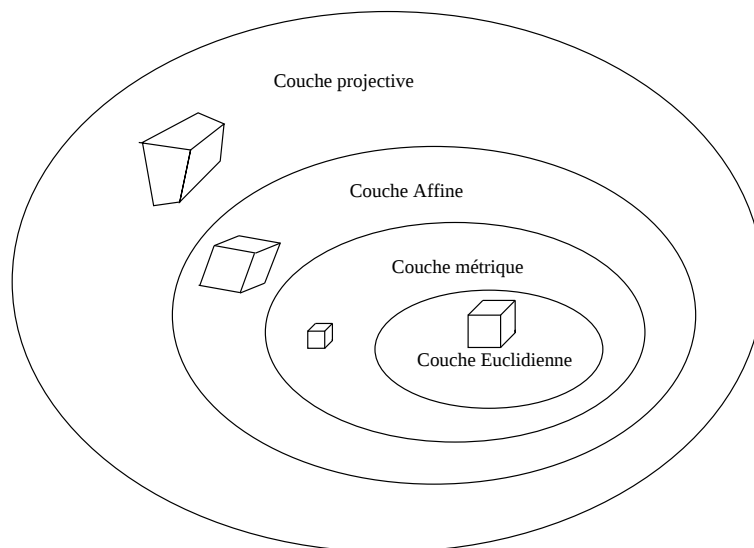


FIG. 2.8 – La stratification de la géométrie

CHAPITRE 3

Modèle mathématique de la géométrie projective

Il est à présent temps d'aborder une description du modèle mathématique en géométrie projective. Il n'est pas question ici de décrire exhaustivement la théorie de la géométrie projective car là n'est pas l'objectif de ce document. A la fin de cette section, le lecteur frustré par cette non exhaustivité pourra consulter les ouvrages de références (par exemple [Bir98], [Fau03]). Les différents points abordés ne seront pas démontrés et seul le plan projectif (de dimension 2) sera évoqué ici afin de pouvoir présenter quelques simulations réalisées sous le logiciel MatLab et comprendre l'enjeu de la géométrie projective.

SECTION 3.1

Vers les coordonnées homogènes

Dans la section précédente, nous avons vu que le plan projectif pouvait être appréhendé comme le plan affine augmenté d'une droite particulière qu'est la droite à l'infini. Pour repérer un point P dans le plan affine (ou même Euclidien), on utilise en général des coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$ tel que $P = [P_x, P_y]^T$. Cependant, ce système de coordonnées n'est pas utilisable dans un plan projectif car il y est impossible de représenter les points à l'infini. On se rappellera que dans le plan projectif les points à l'infini ne sont pas de manière obligatoire "effectivement à l'infini et peuvent se retrouver dans le plan affine". (Voir section 2.4 et figure 2.6). Un nouveau système de coordonnées comportant une dimension supplémentaire doit être introduit. Un point dans le plan projectif est donc représenté par un vecteur de $\mathbb{R}^3$; il s'agit des coordonnées homogènes du point. Dans la pratique, il ne faut alors pas s'imaginer le plan projectif comme un espace à 3 dimensions, bien qu'il s'exprime à l'aide d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

SECTION 3.2

Correspondance entre les coordonnées classiques et homogènes

Soit un point P dans le plan affine de coordonnées $P_x = 4$ et $P_y = 5$. L'objectif est d'établir une correspondance dans le plan projectif à l'aide des coordonnées

homogènes. Pour effectuer une correspondance du point P entre le plan affine en coordonnées classiques et le plan projectif en coordonnées homogènes il faut établir l'hypothèse suivante :

hyp 1 tous les points à l'infini, du plan projectif sont "effectivement à l'infini", c'est à dire que la droite à l'infini (qui contient tous les points à l'infini) est dans sa position canonique.

La figure 2.4 illustre une telle configuration. Ainsi, dans le plan projectif, le point P s'écrit à l'aide d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ grâce à la correspondance bijective C :

$$\begin{aligned} C : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ [P_x, P_y] &\longmapsto C([P_x, P_y]) = [P_x, P_y, 1] \end{aligned}$$

En appliquant cette correspondance, le point P dans le plan projectif respectant l'hypothèse ci-dessus, s'écrit : $[4, 5, 1]$

Les coordonnées homogènes d'un point possèdent quelques particularismes que n'ont pas les coordonnées classiques. En effet, un point P est défini à un scalaire près. Ainsi $P \simeq \lambda P$ où λ est un scalaire et $\simeq$ est un symbole d'équivalence signifiant que P et λP représentent le même point. Par exemple, on a $\forall z \neq 0$, $[P_x, P_y, 1] \simeq [zP_x, zP_y, z]$ et donc $[4, 5, 1] \simeq [8, 10, 2] \simeq [4z, 5z, z] \forall z \neq 0$. Toutes ces représentations désignent le même point P dans le plan projectif.

SECTION 3.3

Et les points à l'infini ?

Jusqu'à présent l'utilisation des coordonnées homogènes n'apporte rien à l'utilisation du plan projectif dont l'intérêt est de pouvoir désigner intrinsèquement à son modèle mathématique les points à l'infini. Restons toujours dans les conditions de l'hypothèse (1). Dans la correspondance C décrite précédemment, une condition restrictive impose d'avoir $P_z \neq 0$ pour tout point dans le plan projectif. En effet, tout point du plan projectif respectant cette restriction possède obligatoirement un équivalent dans le plan affine puisqu'on pourra toujours le ramener à la forme $[P'_x, P'_y, 1]$. Comme le plan affine ne peut pas décrire de point à l'infini, tous ces points du plan projectif ne peuvent donc pas être des points à l'infini.

Les points à l'infini dans le plan projectif s'écrivent donc de la manière suivante : $[P_x, P_y, 0]$ où P_x et P_y représentent la direction du point à l'infini. Par exemple, soit un point D tel que $D_x = 0$, $D_y = 1$ et $D_z = 0$ ($D = [0, 1, 0]$), ce point représente le point à l'infini dans la direction de l'axe des ordonnées. On remarquera que le point $[0, -1, 0]$ est équivalent au point D puisque $[0, -1, 0] \simeq -1[0, 1, 0] \simeq [0, 1, 0]$ et représente aussi le point à l'infini dans la direction de l'axe des ordonnées. Pour mieux comprendre la raison de ce dernier point, il faut observer la figure 2.4 et se rappeler qu'en section 2.4 nous avons précisé que les points diamétralement opposés de la droite à l'infini étaient les mêmes.

Soit P un point à l'infini dans un plan projectif. Si ce point est "effectivement à l'infini" comme dans le cas de l'hypothèse (1), alors il s'écrit sous la forme $[P_x, P_y, 0]$. Dans le cas contraire, si ce point "n'est plus effectivement à l'infini", (cas d'une vue en perspective) alors il pourra s'écrire sous la forme $[P_x, P_y, 1]$

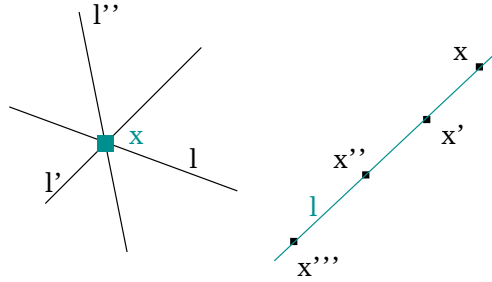


FIG. 3.1 – Le principe de dualité

SECTION 3.4

Définitions et propriétés en dimensions 2

Avant de continuer ce chapitre, il est désormais nécessaire de donner une définition plus mathématique du plan projectif noté $\mathcal{P}^2$. Les définitions qui suivent, proviennent toutes de [Fau03] ou [Pol99]

3.4.1 Points, lignes et principe de dualité

Un point de $\mathcal{P}^2$ est défini par 3 nombres x_1, x_2 et x_3 non tous nuls. Ils forment un vecteur $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ de $\mathbb{R}^3$ défini à un scalaire près.

Une droite est de la même manière définie par 3 nombres l_1, l_2 et l_3 non tous nuls. Ils forment aussi un vecteur $l = [l_1, l_2, l_3]^T$ de $\mathbb{R}^3$ défini à un scalaire près.

Le principe de dualité¹ énonce qu'il n'y a pas de différence formelle entre un point et une droite dans le plan projectif.

L'équation $l^T x = 0$ permet en effet de définir à tour de rôle, soit un point, soit une droite. Dans le premier cas, le point x est vu comme le point de concours de différentes droites représentées par le vecteur l , et vérifiant $l^T x = 0$ dite alors *équation de droites du point* (voir figure 3.1) à gauche. Dans le deuxième cas, la ligne l est vue comme en ensemble de points représentés par le vecteur x , et vérifiant $l^T x = 0$ dite alors *équation de points de la droite*. (Voir figure 3.1 à droite)

3.4.2 Calculs sur les points et les droites

Le point d'intersection de deux droites est donné par le produit vectoriel des droites. Ainsi, supposant 2 droites $l_1 = [l_{1x}, l_{1y}, l_{1z}]$ et $l_2 = [l_{2x}, l_{2y}, l_{2z}]$. Le point d'intersection P de ces deux droites est donc :

$$P = l_1 \wedge l_2 = \begin{bmatrix} l_{1y}l_{2z} - l_{1z}l_{2y} \\ l_{2x}l_{1z} - l_{2z}l_{1x} \\ l_{1x}l_{2y} - l_{1y}l_{2x} \end{bmatrix}$$

¹La Grand dictionnaire encyclopédique donne la définition suivante. Dualité : Caractère de ce qui est double en soi ou composé de deux éléments de nature différente

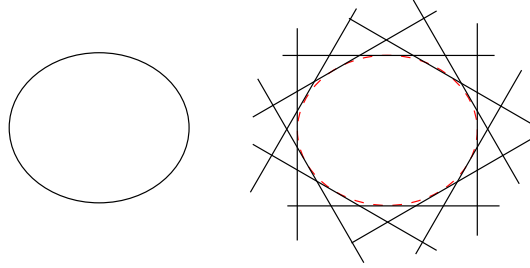


FIG. 3.2 – Une conique à gauche et son dual à droite

La droite passant par 2 points est donnée par le produit vectoriel des points. Ainsi, supposant 2 points $P_1 = [P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}]$ et $P_2 = [P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}]$. La droite passant par ces deux points est donc :

$$l = P_1 \wedge P_2 = \begin{bmatrix} P_{1y}P_{2z} - P_{1z}P_{2y} \\ P_{2x}P_{1z} - P_{2z}P_{1x} \\ P_{1x}P_{2y} - P_{1y}P_{2x} \end{bmatrix}$$

3.4.3 Coniques et coniques duales (voir figure 3.2)

Une conique désignée par A est définie par l'ensemble des points $P \in \mathcal{P}^2$ vérifiant l'équation quadratique $S(P) = P^T A P = 0$ où A est une matrice symétrique (3x3)

Une conique duale désignée par A^* représente l'enveloppe de la conique. Il s'agit de l'ensemble des droites tangentes à la conique désignée par A . La conique duale est alors définie par l'ensemble des droites l vérifiant l'équation quadratique $l^T A^* l = 0$ où $A^* = A^{-1}$ (en supposant que celle-ci soit inversible.)

3.4.4 La droite à l'infini dans le plan projectif & points absolus

La droite à l'infini est la droite qui passe par tous les points à l'infini. Lorsqu'elle est dans sa position canonique, la droite à l'infini s'écrit $l^\infty = [0, 0, 1]$. En effet, prenons $P^\infty = [P_x^\infty, P_y^\infty, 0]^T$, la droite l^∞ à l'infini est telle que $\forall P^\infty \in \mathcal{P}^2, l^{\infty T} P^\infty = 0$. La seule possibilité est alors celle énoncée ci-dessus puisque $\forall P = [P_x, P_y, P_z]^T \in \mathcal{P}^2$, P_x, P_y et P_z ne peuvent être tous nuls.

Les points absolus sont deux points particuliers de la droite à l'infini. Ils permettent notamment de calculer des angles entre 2 droites dans le plan projectif. On se rappellera que les transformations métriques (et donc euclidiennes) conservent les angles. Ceci provient de l'invariance des points absolus au travers des transformations métriques et euclidiennes.

Nous nous plaçons ici dans le cas où la droite à l'infini est dans sa position canonique. (cela correspond à l'hypothèse 1, voir page 14). Tout point $P = [P_x, P_y, P_z]^T$ d'un cercle dans le plan projectif vérifie une équation quadratique de la forme $P^T A P = 0$. Tous les cercles du plan projectif ont la particularité de couper la droite à l'infini sur les deux points absolus. Ce concept est certes plus complexe mais son importance sera

capitale dans la suite. Prenons l'exemple du cercle tel que A soit la matrice identité pour calculer l'expression canonique des points absolus. L'équation obtenue est donc :

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 0 \quad (3.1)$$

Puisque les points absolus sont positionnés sur la droite à l'infini, pour effectuer leur calcul il contraindre P tel que $P_z = 0$, ce qui donne :

$$P_x^2 + P_y^2 = 0 \quad (3.2)$$

La solution ne peut bien évidemment pas être réelle. En effet la résolution de l'équation 3.2 donne comme racine $P_{i1} = (1, i, 0)$ et $P_{i2} = (1, -i, 0)$.

3.4.5 Homographies et transformations projectives

Les transformations dans le plan projectif sont des homographies de $\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$. Elles sont modélisées par des matrices H (3×3) inversibles de tel sorte que ² :

$$\begin{aligned} - \text{l'image d'un point } P \text{ par la l'homographie } H \text{ est donnée par :} \\ P \mapsto HP \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} - \text{l'image d'une droite } l \text{ par l'homographie } H \text{ est donnée par :} \\ l \mapsto H^{-T}l \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} - \text{l'image d'une conique } A \text{ par l'homographie } H \text{ est donnée par :} \\ A \mapsto H^{-T}AH^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} - \text{l'image d'une conique duale } A^* \text{ par l'homographie est donnée par :} \\ A^* \mapsto HA^*H^T \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.4.6 Rapport harmonique et formule de Laguerre

A ce point de l'exposé, il est nécessaire de donner des précisions sur la droite projective noté $\mathcal{P}^1$. Un point de $\mathcal{P}^1$ est défini par 2 nombres x_1 et x_2 non tous deux nuls. Ils forment un vecteur $x = [x_1, x_2]^T$ de $\mathbb{R}^2$ défini à un scalaire près. Lorsque $x_2 = 0$ le point est dit à l'infini. Lorsque $x_2 \neq 0$, le point x peut s'écrire $x = [\lambda, 1]$ où $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$ est dit le paramètre projectif du point x sur la droite projective de $\mathcal{P}^1$. Notons par ailleurs que le paramètre projectif d'un point à l'infini est $\lambda = \infty$. Ainsi la figure 3.3 illustre que le plan projectif contient une infinité de droite projective.

Le rapport harmonique³ est très important puisque c'est la seule grandeur qui est invariante sous une transformation projective. Le rapport harmonique RP de 4 points colinéaires (qui définissent donc une droite projective) est donnée par :

$$RP = \{P_1, P_2; P_3, P_4\} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} \quad (3.7)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et λ_4 sont respectivement les paramètres projectifs des points P_1, P_2, P_3 et P_4 sur la droite projective qu'ils définissent. Si un paramètre projectif prend la valeur $\lambda = \infty$ dans le calcul du rapport, on a $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Dans le cas d'un plan euclidien, le calcul du rapport harmonique se fait directement par le calcul de longueurs entre les 4 points :

$$RP_{euclidien} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{14}} : \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}} \quad (3.8)$$

²Ces résultats sont expliqués dans la thèse de Marc Pollefeys [Pol99]

³cross-ratio en anglais

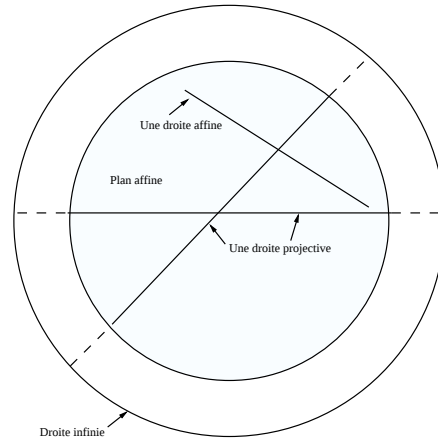


FIG. 3.3 – Droite projective et plan projectif

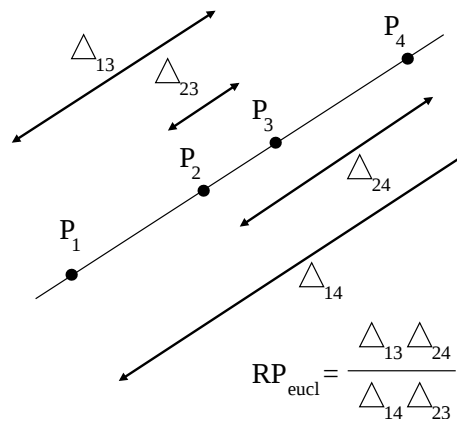


FIG. 3.4 – Le rapport harmonique en espace euclidien

où Δ_{ij} représente la distance euclidienne entre deux points i et j tel que représenté dans la figure 3.4.

Le rapport harmonique de 4 droites dans le plan projectif se calcule de la manière suivante : Soient 4 droites l_1, l_2, l_3 et l_4 , concourantes en O , et l_5 une droite ne passant pas par O . P_1, P_2, P_3 et P_4 sont respectivement les points d'intersection des droites l_1, l_2, l_3 et l_4 . Quelque soit le choix de la droite l_5 , le rapport harmonique des 4 droites est le rapport harmonique des 4 points P_1, P_2, P_3 et P_4 .

$$\{l_1, l_2; l_3, l_4\} = \{P_1, P_2; P_3, P_4\} \quad (3.9)$$

La formule de Laguerre permet de calculer à l'aide des points absolus l'angle α entre 2 droites l_1 et l_2 se coupant en un point O . l_{i1} et l_{i2} désignent respectivement les droites (OP_{i1}) et (OP_{i2}) , où P_{i1} et P_{i2} sont les points absolus sur la droite à l'infini. (voir

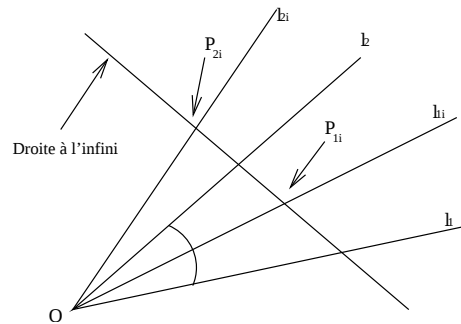


FIG. 3.5 – Rapport harmonique de 4 droites et formule de Laguerre

figure 3.5)

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log_e(\{l_1, l_2, l_{i1}, l_{i2}\}) \quad (3.10)$$

SECTION 3.5

Conclusion

Chaque couche géométrique est caractérisé par des invariances au travers des transformations associées. Le tableau suivant résume ces invariances :

Géométrie	Invariance
Projective	Rapport harmonique
Affine	Distances relatives selon une direction donnée, Parallélisme, Droite à l'infini
Métrique	Distances relatives, angles, points absolus
Euclidienne	distances absolues

CHAPITRE 4

Exemples de simulations Matlab

Cette partie du document a pour objectif de présenter quelques simulation en géométrie projective avec le minimum de théorie apportée dans les sections 2 et 3.

SECTION 4.1

Du plan projectif au plan affine

4.1.1 Description

Reprenons comme exemple la photographie de la table carrée présentée en introduction (figure 1.1). Une prise de vue photographique suit le modèle de caméra présenté en figure 4.1. La scène en dimension 3 possède différents plans indépendants et leur projection sur le plan image impose pour chacun d'entre eux des transformations différentes. Par exemple, le plan formé par le socle carré de la table subit une transformation telle que ce n'est plus un carré sur le plan image. Ainsi, pour tout autre plan de la scène 3D, la transformation ne sera pas nécessairement la même. Il en résulte l'impossibilité de travailler simultanément sur tous les plans. Dans cette section, nous nous intéressons au plan formé par le socle de la table et notamment à la déformation du carré. Ce dernier est dans la figure 1.1 typiquement en représentation projective.

En effet, si nous étions dans une représentation euclidienne ou affine, les côtés opposés seraient parallèles au sens le plus commun. (c'est à dire, que des droites parallèles ne se coupent jamais). La figure 4.2 montre que cette dernière assertion est fausse puisqu'en prolongeant les côtés (censés être parallèles) de la table, les droites se coupent relativement vite.¹ On définit ainsi deux points $A1$ et $A2$. Ces deux points sont ce qu'on appelle en perspective des points de fuites. Ils correspondent à des points où toutes les parallèles d'une même direction convergent. La droite D définie par ces deux points $A1$ et $A2$ est la droite à l'infini. Pour les raisons évoquées auparavant, cette droite n'est pas dans sa position canonique.

Afin de diminuer les temps de calculs, nous travaillerons, sur les images de la figure 4.3, dont la configuration est très similaire à la photographie de la table carrée. Dans

¹C'est une connaissance à priori [bien qu'évidente] de la scène fondé sur notre expérience de la vision qui permet réaliser ce raisonnement

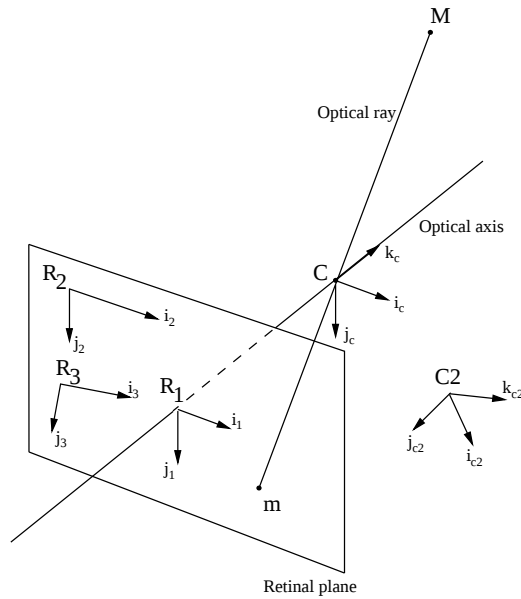


FIG. 4.1 – Le modèle perspectif de la caméra

la première image, les points de fuites ainsi que la droite à l'infini sont clairement identifiés. Au contraire dans la deuxième image (joueurs d'échec) ceux-ci ne sont pas identifiés car ce sont exactement les mêmes que dans la première image. On cherche alors les conséquences qu'impliqueraient une transformation projective du plan replaçant la droite D dans sa position canonique. Lorsque la droite à l'infini est dans sa position canonique, elle devient insensible à toute transformation du groupe affine ou euclidien et dans ce cas, les droites parallèles se coupent à l'infini.² Cela revient à dire, qu'en replaçant la droite à l'infini dans sa position canonique, le nouveau plan serait assimilable à un plan affine dans lequel les droites qui convergent vers un point de fuite redeviendrait parallèles au sens le plus commun. L'objectif est à présent de présenter la formulation mathématique.³

4.1.2 Formulation mathématique

- L_∞ représente les coordonnées de la droite à l'infini avant toute transformation, c'est à dire lorsqu'elle ne se trouve pas dans sa position canonique. On note par l_∞ le vecteur des deux premiers éléments de L_∞ lorsque le troisième vaut 1.
- T_1 est une homographie $[\mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2]$ qui transforme les points d'une telle manière que la droite à l'infini se retrouve en position canonique :

$$T_1 = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0_2 \\ l_\infty & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Il est intéressant de vérifier que cette transformation renvoie effectivement la droite à l'infini dans sa position canonique. Pour cela, il faut appliquer à la droite l'homographie

²On pourrait aussi dire que les droites ne se coupent pas dans le plan affine

³Ces résultats sont présentés de manière plus détaillée dans la thèse de Marc Pollefeys [Pol99]

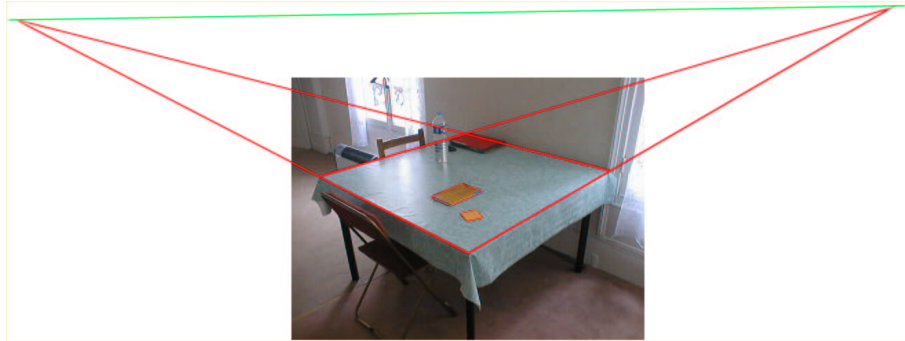


FIG. 4.2 – Identification de point à l'infini et de la droite à l'infini

duale caractérisée par T_1^{-T} . On a :

$$T_1^{-T} = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & -l_\infty \\ 0_2^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

et ainsi :

$$T_1^{-T} L_\infty = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & -l_\infty \\ 0_2^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_\infty \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.1.3 Mise en oeuvre et résultats

Afin de pouvoir effectuer la transformation T_1 il faut avant tout identifier la droite à l'infini (dans une position autre que canonique) dans le plan projectif que l'on souhaite recaler. La première étape consiste à trouver dans la représentation projective deux points de fuite en exploitant la connaissance à priori sur le parallélisme de la scène tel que illustré dans la figure 4.2. On rappelle que le calcul d'une droite se fait grâce au produit vectoriel de deux points de cette droite et que le point d'intersection de deux droites se calcule de la même manière grâce au produit vectoriel des deux droites. A partir de deux points de fuite il est alors relativement simple de calculer la droite L_∞ et d'appliquer ainsi la transformation T_1 .

Dans le cas où la scène ne présente qu'un seul point de fuite (figure 2.6), on considérera un deuxième point à l'infini en position canonique (par exemple : $[1, 0, 0]$).

Les résultats obtenus sont assez satisfaisant car le parallélisme dans le plan concerné par la transformation est totalement retrouvé. La figure 4.3 illustre bien qu'en renvoyant la droite à l'infini dans sa position canonique (et donc aussi les points de fuite), la forme géométrique retrouve son parallélisme. D'autres résultats sont présentés en annexe.

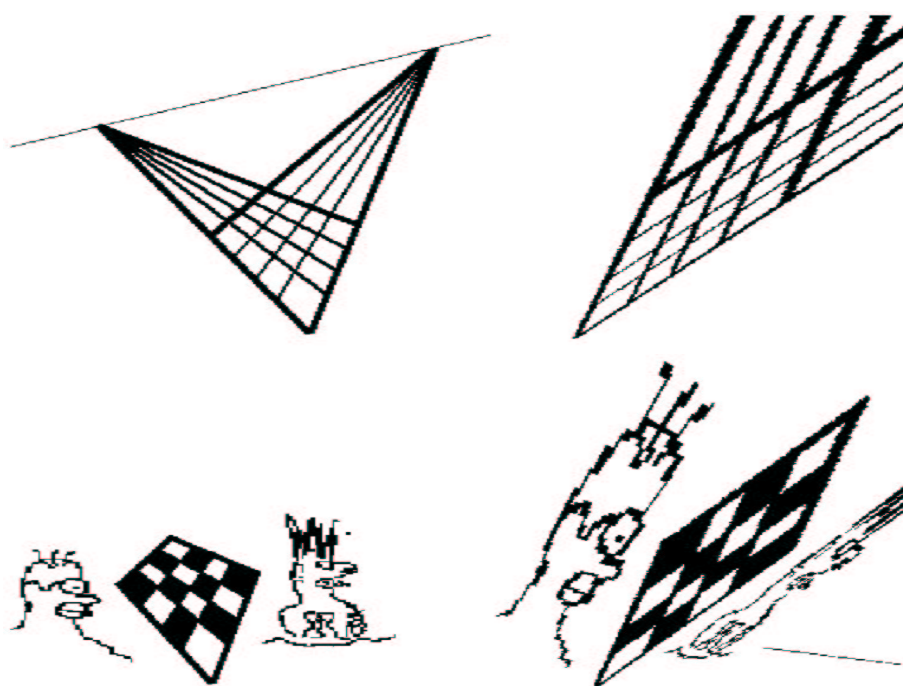


FIG. 4.3 – Exemple de recalage affine. A gauche : la vue en perspective. A droite : le recalage

Du plan projectif au plan euclidien

4.2.1 Description

Dans l'étape précédente, l'homographie T_1 permettait de recaler un plan projectif vers un plan affine et ainsi de retrouver le parallélisme de certaines droites. La présente étape consiste à trouver la transformation permettant de recaler un plan projectif vers un plan euclidien. Dans les cas affines et euclidiens, la droite à l'infini est dans sa position canonique. La différence entre les deux couches géométrique provient de la position des points absolus sur la droite à l'infini. Ce sont d'ailleurs les points absolus qui permettent de déterminer l'angle entre deux droites grâce à la formule de Laguerre et les transformations de la couche affine ne conservent pas nécessairement les angles. En effet, dans une représentation euclidienne, les points à l'absolus sont dans leur position canonique $((1, i, 0)$ et $(1, -i, 0))$ contrairement à une représentation affine. Pour recaler un plan projectif, il est dans un premier temps plus judicieux de décomposer le raisonnement en deux étapes : le recalage affine effectué précédemment puis le recalage euclidien.

Prenons pour exemple le recalage affine de la première image de la figure 4.3. Dans cette représentation, les deux droites extérieures forment un angle relativement aigu. Cependant, nous savons pertinemment que l'angle entre ces deux droites est un angle droit. La formule de Laguerre permet de calculer grâce aux points absolus des angles entre deux droites (que ce soit dans un plan projectif, affine ou même euclidien). En utilisant la formule de Laguerre dans le sens inverse on peut ainsi obtenir la position des points absolus connaissant des angles de la scène. Deux angles totalement indépendants l'un de l'autre seront nécessaires au calcul des deux points absolus. A présent, la connaissance de la position des points absolus permet d'appliquer la transformation explicitée ci-dessous afin de les repositionner canoniquement.

4.2.2 Formulation mathématique

Les points absolus sont la solution d'une équation quadratique du type $[x, y]P_i^\infty[x, y]^T = 0$ lorsque la droite à l'infini est dans sa position canonique⁴ et où P_i^∞ est une matrice symétrique de dimensions $(2, 2)$ et de rang 2. On peut montrer que $P_i^\infty = A^{-T}A^{-T}$ et T_2^{-1} est la transformation permettant de recaler un plan affine vers un plan euclidien s'écrit :

$$T_2 = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0_2 \\ 0_2^T & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

et en combinant T_1 (recalage d'un plan projectif vers un plan affine) et T_2 (recalage d'un plan affine vers un plan euclidien), on obtient le recalage T d'un plan projectif vers un plan euclidien pour chaque point :

$$T = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0_2 \\ l_\infty & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

⁴Cette assertion permet d'écarter la composante z car tous les points de la droite à l'infini en position canonique ont pour propriété : $z = 0$

4.2.3 Mise en oeuvre et résultats

La mise en oeuvre est ici légèrement plus complexe car il faut d'abord identifier les points absolus pour calculer ensuite la matrice A . Dans la présente méthode, on cherche à utiliser la formule de Laguerre sur des droites définissant des angles droits (grâce à une connaissance à priori). Prenons par exemple deux droites définies par un angle de la table dans la figure 4.2. Ces deux droites forment un angle droit que l'on pourrait calculer grâce à la formule de Laguerre si on connaissait les points absolus. (voir figure 3.5 et section). Le rapport harmonique qui intervient dans cette formule serait alors calculé grâce aux paramètres projectifs sur la droite à l'infini.

Pour trouver les points absolus, on suivra la méthode suivante :

- Sélectionner 2 droites qui forment un angle droit
- Pour ces 2 droites calculer le point d'intersection avec la droite à l'infini (dans sa position non canonique).
- Appliquer la transformation T_1 , aux deux points trouvés. Cela permet de connaître la position de ces deux points lorsque la droite à l'infini est en position canonique. (la dernière coordonnée est alors nulle car le point est renvoyé "effectivement à l'infini").
- Calculer le paramètre projectif de ces deux points sur la droite à l'infini. Il suffit de normaliser par exemple la première coordonnée et de conserver la valeur de la deuxième coordonnée. On obtient a_1 et b_1 .
- Recommencer les 4 dernières étapes sur des droites totalement indépendantes dont l'angle est droit. (d'après une connaissance à priori). On obtient a_2 et b_2 .
- En utilisant la formule Laguerre, on obtient un système d'équation dont la solution donne le produit $Y_1 Y_2$ et la somme $Y_1 + Y_2$ des paramètres des points projectifs. Les paramètres projectifs s'en déduisent alors simplement et les points absolus s'écrivent : $[1, Y_1, 0]$ et $[1, Y_2, 0]$ (facultatif)
- Les points absolus sont la solution d'une équation quadratique du type $[1, Y_n] P_i^\infty [1, Y_n]^T = 0$ ($n = 1$ ou 2). La matrice est de la forme :

$$P_i^\infty = \begin{bmatrix} 1 & \beta/2 \\ \beta/2 & \alpha \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

où : $\alpha = 1/(Y_1 \times Y_2)$ et $\beta = -\alpha \times (Y_1 + Y_2)$

– Puisque $P_i^\infty = A^{-T} A^{-T}$, une factorisation de Cholevski permet d'obtenir A^{-1} . La transformation T permet alors de recalculer directement un plan projectif vers un plan euclidien.

Les résultats de la méthode sont illustrés en figure 4.4

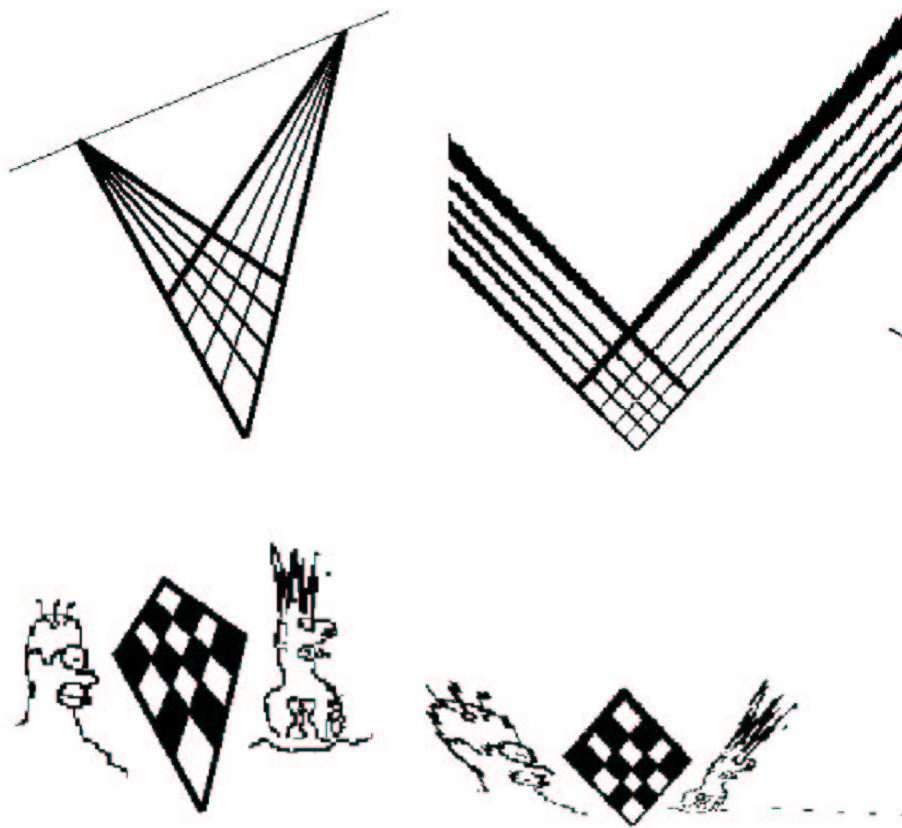


FIG. 4.4 – Exemple de recalage euclidien. A gauche : la vue en perspective. A droite : le reclage

CHAPITRE 5

Pour aller plus loin

Comme précisé en début de section, il ne s'agit pas de réécrire un précis de géométrie projective. Une étude plus approfondie et appliquée à la vision par ordinateur est à présent conseillée au lecteur. Dans un premier, nous conseillons l'excellent livre d'Olivier Faugeras [Fau03]. La thèse de Marc Pollefeys [Pol99] apportera dans son chapitre introduisant la géométrie projective quelques éléments supplémentaires. Par ailleurs les techniques exposées au chapitre 4 ne sont pas du tout rigoureuses. Dans la pratique, il est nécessaire d'utiliser des techniques d'estimation robuste pour effectuer de telles transformations.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bir98] Stan Birchfield. An introduction to projective geometry (for computer vision). Unpublished note, Stanford university, <http://robotics.stanford.edu/~birch>, 1998.
- [Fau03] Olivier Faugeras. *Three-dimensional computer vision. A geometric view point*. MIT Press, 2003. ISBN : 0-262-06158-9.
- [Hor00] Radu Horaud. Vision 3-d projective, affine et euclidienne. Technical report, INRIA Rhône-Alpes and GRAVIR-CNRS, <ftp://ftp.inrialpes.fr/pub/movi/cours/vision-3d.ps.gz>, <ftp://ftp.inrialpes.fr/pub/movi/cours/vision-3d.pdf>, Janvier 2000.
- [Par] José M. Parramón. *Le grand livre de la perspective*. Bordas. ISBN : 2-04-018534-8.
- [Pol99] Marc Pollefeys. *Self-calibration and metric 3d reconstruction from uncalibrated image sequences*. PhD thesis, <http://www.esat.kukeuven.ac.be/~pollefey>, 1999. ISBN : 90-5682-193-8.