

Intégrale d'Euler

1. Considérons la famille d'applications $\{f_x, x \in [0; \pi]\}$ définies sur $I =]0; 1[$ par

$$f_x(t) = \frac{\ln(t^2 - 2t \cos x + 1)}{t}$$

En remarquant que

$$t^2 - 2t \cos x + 1 = (t - \cos x)^2 + \sin^2 x$$

il est clair que, pour tout $t \in]0; 1[$, la fonction $x \in [0; \pi] \mapsto f_x(t)$ est continue. Par ailleurs, l'inégalité $-1 \leq \cos x \leq 1$ fournit rapidement

$$2 \ln(1 - t) \leq \ln(t^2 - 2t \cos x + 1) \leq 2 \ln(1 + t)$$

On en déduit donc que

$$\left| \ln(t^2 - 2t \cos x + 1) \right| \leq 2 \max(-\ln(1 - t), \ln(1 + t)) \quad (1)$$

Comme, pour $t \in]0; 1[$

$$0 < 1 - t^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - t} \geq 1 + t \Rightarrow -\ln(1 - t) \geq \ln(1 + t)$$

l'inégalité (1) nous donne

$$\left| \ln(t^2 - 2t \cos x + 1) \right| \leq -2 \ln(1 - t)$$

et on obtient alors la domination : pour tout $x \in [0; \pi]$ et tout $t \in]0; 1[$

$$|f_x(t)| \leq \frac{-2 \ln(1 - t)}{t}$$

A titre d'exercice, le lecteur vérifiera sans peine que la fonction

$$g : t \in]0; 1[\mapsto \frac{-2 \ln(1 - t)}{t}$$

est positive et intégrable sur $]0; 1[$ (prolongement par continuité en 0, et procéder par ipp pour le problème en 1). Ainsi les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégral sont vérifiées et l'application

$$F : x \in [0; \pi] \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(t^2 - 2t \cos x + 1)}{t} dt$$

est définie et continue sur $[0; \pi]$, et on se propose maintenant d'en donner une expression « sans intégrale ».

2. Montrons d'abord que F est solution d'une équation *fonctionnelle* qu'on utilisera dans la conclusion. Pour $x \in [0; \pi]$, il est clair que $\pi - \frac{x}{2} \in [0; \pi]$ et nous pouvons calculer

$$F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\ln(t^2 - 2t \cos \frac{x}{2} + 1)}{t} dt + \int_0^1 \frac{\ln(t^2 + 2t \cos \frac{x}{2} + 1)}{t} dt =$$

$$\int_0^1 \frac{\ln \left((t^2 - 2t \cos \frac{x}{2} + 1)(t^2 + 2t \cos \frac{x}{2} + 1) \right)}{t} dt$$

Un simple développement donne alors

$$F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\ln(t^4 - 2t^2 \cos x + 1)}{t} dt$$

Le changement de variable défini par $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale obtenue fournit finalement

$$F\left(\frac{x}{2}\right) + F\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}F(x) \quad (2)$$

3. Montrons maintenant que F est dérivable sur $]0; \pi[$, en notant d'abord immédiatement que l'application $x \in]0; \pi[\mapsto f_x(t)$ est dérivable, de dérivée

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}(t) = \frac{2 \sin x}{t^2 - 2t \cos x + 1} = \frac{2 \sin x}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} \geq 0$$

et les applications $t \in]0; 1[\mapsto \frac{\partial f_x}{\partial x}(t)$ sont localement intégrables sur $]0; 1[$ (par continuité). Pour la condition de domination, introduisons le compact $[a; b]$ tel que $0 < a < b < \pi$: on a, pour tout $x \in [a; b]$ et tout $t \in]0; 1[$

$$\left| \frac{\partial f_x}{\partial x}(t) \right| \leq \frac{2 \sin x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x} \leq \frac{2}{\min(\sin a, \sin b)}$$

et ainsi la famille $\left\{ \frac{\partial f_x}{\partial x}, x \in [a; b] \right\}$ est dominée sur $]0; 1[$ par une fonction constante, a fortiori intégrable sur $]0; 1[$. Les conditions du théorème de dérivation sous le signe intégral sont donc vérifiées et on peut affirmer que F est dérivable sur $]0; \pi[$, de dérivée

$$F'(x) = 2 \sin x \int_0^1 \frac{1}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} dt \quad (3)$$

4. En remarquant que l'intégrale (3) est l'intégrale d'un élément simple de deuxième espèce, on peut donc calculer « explicitement » $F'(x)$ par les techniques usuelles de primitivation. On a ici directement, pour $x \in]0; \pi[$

$$F'(x) = 2 \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sin x}}{1 + \left(\frac{t - \cos x}{\sin x}\right)^2} dt = 2 \left[\arctan \left(\frac{t - \cos x}{\sin x} \right) \right]_0^1$$

ie

$$F'(x) = 2 \arctan \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) + 2 \arctan \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

Une manipulation simple de trigonométrie classique (laissée au lecteur) montre que

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

de sorte que

$$F'(x) = 2 \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \pi - x$$

On en déduit finalement que, pour $x \in [0; \pi]$ (rappel : F est continue)

$$F(x) = \pi x - \frac{x^2}{2} + C \quad (4)$$

où C est une constante réelle qu'il nous faut maintenant déterminer.

5. A défaut de connaître une valeur particulière de F , nous reportons (4) dans (2), et un calcul élémentaire fournit alors

$$C = -\frac{\pi^2}{3}$$

et donc, pour tout $x \in [0; \pi]$

$$F(x) = \pi x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{3}$$

qui peut s'écrire

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{(x - \pi)^2}{2} \quad (5)$$

Il est surprenant que l'intégrale $F(x)$ ne soit rien d'autre, finalement, qu'un « vulgaire » trinôme..

Pour conclure, on obtient, en faisant respectivement $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$ dans (5), les intégrales d'Euler¹

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt &= -\frac{\pi^2}{6} \\ \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt &= \frac{\pi^2}{12} \\ \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt &= \frac{\pi^2}{24} \end{aligned} \quad (6)$$

On notera également que le changement de variable $u = 1 - t$ dans l'intégrale (6) donne

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1} du = \frac{\pi^2}{6}$$

¹L. Euler (1707-1783) a obtenu en 1731 la valeur de ces intégrales, en utilisant des développements en série.