

Nilpotent et diagonalisable, je t'aime, moi non plus...

Dominique Hoareau, domeh@wanadoo.fr

On se place dans l'algèbre $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ des matrices de taille p à coefficients complexes, munie de sa structure topologique naturelle d'espace vectoriel de dimension finie. On raconte la saga de deux familles, $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes et $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables.

1) Il y a des ressemblances entre ces deux parties $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, notamment des similitudes de structures. Ce sont 2 cônes (non réduit à 0, donc non bornés), étoilés en 0 (donc connexe par arcs), non convexes sans autre forme particulière de stabilité et si on ajoute un peu de commutation, on compense quelques lacunes de structure. (cf Partie 6)

2) Qui se ressemble s'assemble, voilà l'union avec la décomposition de Dunford : Toute matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ s'écrit $M = D + N$, D diagonalisable, N nilpotente avec un tas de bonnes propriétés. (cf Partie 4)

3) Il y a évidemment quelques orages entre ces amants. Illustration d'un premier affrontement : toute exponentielle de matrice est un polynôme en la matrice. Mais existe-t-il un polynôme qui coïncide avec l'exponentielle matricielle ? $\mathcal{N}$ dit oui, $\mathcal{D}$ dit non. Chacun tire la couverture vers soi et c'est $\mathcal{D}$ qui a le dernier mot. (cf Partie 3)

4) Ce premier exemple préfigure une opposition de poids. Topologiquement, l'encombrement de $\mathcal{D}$ est largement plus conséquent que celui de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. (cf Partie 2)

5) Malgré une opposition criarde dans les multiplicités des valeurs propres (cf Partie 5), on rapproche les nilpotents dont le noyau est une droite et les diagonalisables à spectre simple (cf Partie 9) en étudiant les rapports de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ avec un troisième cône, celui des matrices cycliques.

6) On cherche par ailleurs l'intersection des 2 cônes. Elle est réduite à la matrice nulle, ce qui laisse dire que être diagonalisable et être nilpotente sont pour les matrices des propriétés antinomiques. (cf Partie 7)

7) L'intersection des 2 cônes nilpotent et diagonalisable apparaît clairement avec les caractérisations topologiques. (cf Partie 8)

1 Le décor

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On désigne par M un élément générique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et par f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^p$. On note $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ les cônes des matrices nilpotentes et diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On choisit la lettre N (resp. D) pour désigner une matrice nilpotente (resp. diagonalisable) et les minuscules idoines pour les endomorphismes canoniquement associés.

On rappelle que si n est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{C}^p$ et si F est un sous-espace stable par n , l'endomorphisme induit par n sur F est lui-même nilpotent. On a un résultat analogue si on remplace l'hypothèse " n nilpotent" par " d diagonalisable". Si on appelle $E_1, \dots, E_k$ les sous-espaces propres distinctes associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de d , on retiendra que $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} F \cap E_i$.

Exercice 1

Montrer que si $N_1, \dots, N_p$ sont p matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ commutant deux à deux, alors $N_1 \dots N_p = 0$.

On raisonne par récurrence sur p . En dimension 1, il n'y a rien à dire. On suppose la propriété vraie jusqu'à $p-1 \geq 1$. On note $n_1, \dots, n_p$ les endomorphismes de $\mathbb{C}^p$ canoniquement associés aux matrices N_i . Si $n_p = 0$, le résultat est évident. Sinon, on envisage son image $F = \text{Im}(n_p)$, qui est stable par chaque n_i , et on note $\tilde{n}_i$

l'endomorphisme induit par n_i sur F . Chaque $\tilde{n}_i$ est nilpotent et, puisque F est de dimension inférieure à $p-1$, $\tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_{p-1} = O$. Pour x quelconque dans $\mathbb{C}^p$, on écrit $n_1 \dots n_{p-1} n_p(x) = n_1 \dots n_{p-1}(y)$ avec $y = n_p(x) \in F$. Ainsi, $n_1 \dots n_{p-1} n_p(x) = \tilde{n}_1 \dots \tilde{n}_{p-1}(y) = O$ d'où le résultat.

En particulier, on retiendra

Lemme 1

L'indice de nilpotence d'une matrice N nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est inférieure ou égal à p . Autrement dit, N est nilpotente si, et seulement si, $N^p = 0$.

Remarque : Le cône nilpotent est fermé (non compact puisque non borné) dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ puisque c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $M \mapsto M^p$.

Si M est un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique $\Pi_M(X) = \det(M - XI_p)$ s'écrit :

$$\Pi_M(X) = (-1)^p [X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0].$$

Réciproquement, tout polynôme Π de $\mathbb{C}[X]$ du type $\Pi(X) = (-1)^p [X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0]$ est le polynôme caractéristique de la matrice

$$C_\Pi = \begin{pmatrix} 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

dite matrice compagnon de Π . Pour s'en convaincre, on peut remplacer la ligne L_1 de $\det(C_\Pi - XI_p)$ par

$$L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \dots + X^{p-1}L_p$$

puis développer le nouveau déterminant selon sa première ligne. Une matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dite cyclique lorsque M est semblable à une matrice compagnon. On vérifie facilement que cela équivaut encore à dire qu'il existe un vecteur e de $\mathbb{C}^p$ tel que $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est une base de $\mathbb{C}^p$, ce qui justifie la terminologie. Dans ce cas, on dit que e est un générateur f cyclique de $\mathbb{C}^p$. On remarque enfin que la famille $\mathcal{C}$ des matrices cycliques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est un cône époiné (ayant 0 dans son adhérence). Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ cyclique et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La matrice λM est semblable à la matrice λC_{Π_M} . Si f_λ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ représenté dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ par λC_{Π_M} , la matrice de f_λ dans la base $(\frac{1}{\lambda^{p-1}}e_1, \frac{1}{\lambda^{p-2}}e_2, \dots, \frac{1}{\lambda}e_p)$ est encore une matrice compagnon, ce qui prouve que λM est cyclique.

2 Une opposition de poids dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

On veut comparer l'encombrement de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

2.1 Aspect vectoriel

On commence par engraisser les cônes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ en envisageant les sous espaces qu'ils engendrent. On peut s'attendre à de grosses parties (convexes) de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Proposition 1

- Le sous-espace de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ engendré par les matrices nilpotentes est l'hyperplan noyau de la forme linéaire trace.
- Le sous-espace de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ engendré par les matrices diagonalisables est $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Pour 1 : On commence par le

Lemme 2

Si M est une matrice $p \times p$ de trace nulle, M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

On raisonne par récurrence sur p . Pour $p = 1$, il n'y a rien à faire. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang $p - 1$. Soit M une matrice $p \times p$ de trace nulle. Puisque la caractéristique de $\mathbb{C}$ est nulle, M n'est pas scalaire. Soit alors, en vertu du lemme de Schur, une colonne C dans $\mathbb{C}^p$ telle que (C, MC) soit libre. On complète (C, MC) en une base de $\mathbb{C}^p$ et M est semblable à

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ 1 & \lceil & \rceil \\ \vdots & & N \\ 0 & \lfloor & \rfloor \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \text{Tr}(M) = \text{Tr}(M') = \text{Tr}(N) = 0.$$

La récurrence s'enclenche avec $N \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{C})$.

Soit à présent M une matrice de trace nulle. Elle est semblable à une matrice M' à diagonale nulle. Or M' est combinaison linéaire des matrices élémentaires $E_{i,j}$, ($i \neq j$) qui sont nilpotentes. D'où facilement le résultat.

Pour 2 : On réalise la preuve en dimension 2. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ étant donnée, on choisit $\lambda \in \mathbb{C}$, puis $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu \neq \lambda$ et $d - \mu \neq a - \lambda$ et on écrit :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}_{\text{à spectre simple}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a - \lambda & 0 \\ c & d - \mu \end{pmatrix}}_{\text{à spectre simple}}.$$

Voici un corollaire qui assure la transition avec le paragraphe suivant :

Corollaire 1

Le cône $\mathcal{N}$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Si $\mathcal{N}$ a un intérieur non vide, alors le sous-espace engendré par $\mathcal{N}$ est un sous-espace d'intérieur non vide donc coïncide avec $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Ce qui n'est pas.

2.2 Aspect topologique

"Sortir" une matrice compagnon de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, c'est choisir ses p valeurs propres, ou tirer avec remise p scalaires de $\mathbb{C}$. On sent bien qu'une matrice compagnon est "statistiquement" à valeurs propres distinctes et non nulles. Lorsqu'on sort maintenant une matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on peut considérer la matrice compagnon du polynôme caractéristique Π_M de M donc M est aussi statistiquement à spectre simple (avec $0 \notin \text{Sp}(M)$) donc ¹ diagonalisable (invertible). On ne sera ainsi pas surpris de découvrir que, si M n'est pas diagonalisable (respectivement est nilpotente), elle est en tout cas étouffée par des matrices diagonalisables (respectivement invertibles).

Proposition 2

1. Le cône des matrices complexes diagonalisables a pour intérieur l'ensemble $\mathcal{D}_\circ$ des matrices diagonalisables à spectre simple qui est un (ouvert) dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
2. Le groupe $\text{Gl}_p(\mathbb{C})$ des matrices invertibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ donc le cône des matrices complexes nilpotentes est contenu dans un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ d'intérieur vide.

¹ Les p sous-espaces propres de M de dimension au moins 1 et de somme directe sont nécessairement de dimension égale à 1.

Remarque : Le sous-espace engendré par $\mathcal{D}$ est, comme $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, de dimension finie donc est fermé. Par conséquent, il contient l'adhérence de $\mathcal{D}$ et on retrouve qu'il coïncide avec $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Pour 1 :

Densité.

Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$. On appelle $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de M et $n_1, \dots, n_s$ leurs multipli-

catés. Par trigonalisation de M , il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}$

tel que $M = PTP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} P^{-1}$. On commence par séparer les λ_i en choisissant

$\rho \in]0; \varepsilon[$ tel que les disques fermés centrés en λ_i et de rayon ρ soient disjoints deux à deux. Pour $1 \leq i \leq s$, on choisit, sur le cercle de centre λ_i et de rayon ρ , n_i complexes distinctes $z_i^1, \dots, z_i^{n_i}$. Si $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ définie par $\|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{i,j}|$ et $\nu = \|P^{-1} \bullet P\|$, $\nu(M - D) \leq \rho < \varepsilon$ où D est la matrice

diagonalisable à spectre simple $D = P \begin{pmatrix} z_1^1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & z_s^{n_s} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Intérieur de $\mathcal{D}$.

On vient de voir que l'adhérence de $\mathcal{D}$ est $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Si on admet provisoirement que la frontière $Fr(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ est l'ensemble des matrices complexes ayant au moins une valeur propre multiple, on conclut que l'intérieur de $\mathcal{D}$ est $\overset{\circ}{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}} \setminus Fr(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_\circ$. Reste à déterminer la frontière de $\mathcal{D}$. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ ayant au moins une valeur propre multiple λ . Puisque $\mathcal{D}_\circ$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, M est dans l'adhérence de $\mathcal{D}$. Par ailleurs, par trigonalisation de M , il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$ tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & * \\ 0 & 0 & * & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On envisage alors la suite de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de terme général $M_k = P \begin{pmatrix} \lambda & \mu + \frac{1}{k} & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & * \\ 0 & 0 & * & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} P^{-1}$. Pour $k > \frac{1}{|\mu|}$ si

$\mu \neq 0$, $k \geq 1$ sinon, M_k n'est pas diagonalisable sous peine de voir le bloc $\begin{pmatrix} \lambda & \mu + \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ diagonalisable et la suite (M_k) converge vers M : M est aussi dans l'adhérence du complémentaire de $\mathcal{D}$. Ainsi, la frontière de $\mathcal{D}$ contient les matrices à valeurs propres non distinctes. Soit à présent M dans la frontière de $\mathcal{D}$. Puisque M est adhérent au complémentaire de $\mathcal{D}$, il existe une suite (M_k) de matrices non diagonalisables convergeant vers M . Les matrices M_k ont toutes au moins une valeur propre multiple λ_k et ces valeurs propres sont bornées. En effet, on choisit sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une norme $\|\cdot\|$ subordonnée à une norme de $\mathbb{C}^p$, un entier k_0 tel

que $k \geq k_0 \Rightarrow \|M_k\| \leq \|M\| + 1$. Puisque chaque valeur propre de M_k est inférieure en module à $\|M_k\|$, la suite (λ_k) est bornée par $\max \left(\max_{1 \leq k < k_0} \|\lambda_k\|; \|M\| + 1 \right)$. Quitte à extraire une sous suite de (λ_k) , on peut supposer que (λ_k) qui vérifie $\Pi_{M_k}(\lambda_k) = \Pi'_{M_k}(\lambda_k) = 0$ converge dans $\mathbb{C}$ vers un certain λ . A la limite on a $\Pi_M(\lambda) = \Pi'_M(\lambda) = 0$ ce qui prouve que M a au moins une valeur propre multiple et, en donnant la deuxième inclusion, achève la preuve.

Pour 2 : Pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\det M$ est un polynôme en les coefficients de M donc l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Puisque $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{G}l_p(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est aussi ouvert. Soit à présent M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Puisque M n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, on choisit $\rho \in]0; \varepsilon[$ tel que $\Pi_M(\rho) \neq 0$. Ainsi, $M - \rho I$ est inversible et, en envisageant la norme

$$\|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{i,j}|$$

sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\|M - (M - \rho I)\| = \|\rho I\| \leq \varepsilon$, ce qui assure la densité de $\mathcal{G}l_p(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

3 Un premier affrontement

Proposition 3

Pour tout $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\exp(M)$ est un polynôme en M .

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_k(X) = 1 + X + \dots + \frac{1}{k!}X^k \in \mathbb{C}[X]$. La matrice $\exp(M)$ est limite de la suite $(Q_k(M))$ à valeurs dans $\mathbb{C}[M]$. Or $\mathbb{C}[M]$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de dimension finie (égale au degré du polynôme minimal μ_M de M) donc est fermé dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Ainsi, $\exp(M) \in \mathbb{C}[M]$.

Existe-t-il un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ (universel) tel que : $\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \quad \exp(M) = Q(M)$?

On a une réponse immédiate si on se restreint au cône $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes : pour $N \in \mathcal{N}$, l'indice de nilpotence est inférieure à p donc $\exp(N) = I + N + \dots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}$. En revanche, le résultat est faux dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On raisonne par l'absurde ; On suppose qu'il existe un tel polynôme Q qui vérifie alors, en particulier,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exp(\text{Diag}(\lambda, 0, \dots, 0)) = Q(\text{Diag}(\lambda, 0, \dots, 0)),$$

c-à-d

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q(0) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & Q(0) \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'exponentielle numérique coïncide avec le polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, ce qui est clairement faux.

4 L'union sacrée par Dunford

Si $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$, donc $\det(N) = 0$, donc 0 est valeur propre de N . Soit λ une valeur propre complexe de N et $X \in \mathbb{C}^p$, $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $N^k X = \lambda^k X = 0$ donc λ est nécessairement nul. Ainsi, on retiendra que $N \in \mathcal{N}$ a p fois la valeur propre 0 ou, de façon équivalente, son polynôme caractéristique est $\Pi_N(X) = (-1)^p X^p$. Puisque l'indice de nilpotence de N est inférieur à p , le polynôme Π_N est annulé par N . Soit maintenant D une matrice diagonalisable. Il existe $P \in \mathcal{G}l_p(\mathbb{C})$ et $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathcal{D}$ tels que $D = P\Delta P^{-1}$. On a alors $\Pi_D(D) = P \text{Diag}(\Pi_D(\lambda_1), \dots, \Pi_D(\lambda_p)) P^{-1} = 0$. Le célèbre théorème de Cayley-Hamilton affirme en fait que toute matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ (ou tout endomorphisme f de $\mathbb{C}^p$) annule son polynôme caractéristique. Pour le

justifier, on peut utiliser la densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, ce qui d'une certaine façon revient à négliger les matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Grossièrement, on peut écrire $M \approx D$. La décomposition de Dunford abonde dans ce sens et apparaît comme une formule exacte. Afin d'éviter toute décomposition non pertinente comme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{diagonalisable}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{diagonalisable}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente}},$$

Dunford se présente avec un cahier des charges bien rempli.

Théorème 1 (*Décomposition de Dunford*)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$, de polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un couple (d, n) d'endomorphismes de $\mathbb{K}^p$ tels que :

1. $f = d + n$
2. d est diagonalisable
3. n est nilpotent
4. d et n commutent.

Par ailleurs, le couple (d, n) est unique dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p) \times \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$. Enfin, d et n sont des polynômes en f .

Avec la réduction simultanée (cf partie 6), on peut montrer que les éléments propres de f sont exactement ceux de d , et en ce sens, le reste n , contenant peu de caractéristiques de f , semble vide et on a envi d'écrire $f = d + o(d)$.

5 Une opposition dans les multiplicités de valeurs propres

Si $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est nilpotente, $N \in \mathcal{N}$ a p fois la valeur propre 0. A contrario, une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est statistiquement à spectre simple. C'est cette opposition dans les multiplicités de valeurs propres qui est traduite ici.

Propriété 1 (*Endomorphismes nilpotents et trace des puissances*)

Soit N une matrice $p \times p$ à coefficients complexes, telle que

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad \text{Tr}(N^k) = 0.$$

Alors le polynôme caractéristique de N est $C_N(X) = (-1)^p X^p$.

Le théorème de Cayley-Hamilton assure alors que N est nilpotente, et en définitive,

$$N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente si, et seulement si, } \forall 1 \leq k \leq p, \quad \text{Tr}(N^k) = 0.$$

Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de N s'écrit : $C_N(X) = (-1)^p \prod_{1 \leq i \leq p} (X - \lambda_i)$

avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$. On remarque que λ_i^k est valeur propre de N^k ($k \geq 1$) donc les valeurs propres de N^k sont exactement les λ_i^k . Si N possède une valeur propre non nulle, on note $\mu_1, \dots, \mu_s$ les valeurs propres distinctes non nulles de N et $n_1, \dots, n_s$ (dans $\mathbb{N}^*$) leur multiplicité. On peut écrire :

$$\begin{cases} n_1 \mu_1 + \dots + n_s \mu_s = 0 \\ n_1 \mu_1^2 + \dots + n_s \mu_s^2 = 0 \\ \vdots \\ n_1 \mu_1^s + \dots + n_s \mu_s^s = 0 \end{cases}$$

On interprète ces équations comme un système $s \times s$ en $n_1, \dots, n_s$ dont le déterminant de type Vandermonde vaut :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^s & \mu_2^s & \dots & \mu_s^s \end{pmatrix} = \mu_1 \dots \mu_s \prod_{1 \leq i < j \leq s} (\mu_j - \mu_i) \neq 0.$$

Ainsi, $n_1 = \dots = n_s = 0$, ce qui est absurde.

Proposition 4

Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $M \neq 0$. Si $\text{Tr}(M) = \dots = \text{Tr}(M^{p-1}) = 0$, alors M est nilpotente ou diagonalisable.

Si $\text{Tr}(M^p) = 0$, M est nilpotente en vertu de la propriété 1. On suppose que $\text{Tr}(M^p) \neq 0$. La matrice M a donc des valeurs propres non nulles. Soit $\mu_1, \dots, \mu_s$ les valeurs propres distinctes de M et $n_1, \dots, n_s$ leur multiplicité non nulle dans Π_M . Si $s < p$, on peut écrire

$$\begin{cases} n_1 \mu_1 + \dots + n_s \mu_s = 0 \\ n_1 \mu_1^2 + \dots + n_s \mu_s^2 = 0 \\ \vdots \\ n_1 \mu_1^s + \dots + n_s \mu_s^s = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad A \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix} = 0$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^s & \mu_2^s & \dots & \mu_s^s \end{pmatrix} \text{ de déterminant } \mu_1 \dots \mu_s \prod_{1 \leq i < j \leq s} (\mu_j - \mu_i) \neq 0 \text{ est inversible.}$$

Contradiction puisque $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix} \neq 0$. Ainsi $s = p$, ou encore le spectre de M est simple et M est diagonalisable.

6 De la commutation pour compenser les lacunes de structures

Si on pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que $N + {}^t N$ (inversible) n'est pas nilpotente alors que N et ${}^t N$ le sont. Par ailleurs, $N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (idempotente non nul) n'est pas nilpotente, ce qui veut dire que le cône $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes n'a pas de pouvoir d'absorption. La commutativité vient compenser les lacunes de stabilité sur $\mathcal{N}$:

- La somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent est nilpotente (cf exercice 3, page 8).
- La composée d'un endomorphisme nilpotent et d'un endomorphisme (quelconque) qui commutent est nilpotente.

Exercice 2

On pose $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Pour $A \in E$, on note Ad_A l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\text{Ad}_A : M \mapsto AM - MA.$$

Si A est nilpotente (respectivement diagonalisable), alors Ad_A l'est aussi.

On note L_A et R_A les endomorphismes de E donnés par les multiplications à gauche et à droite par A . Si A est nilpotente, il en est de même de L_A et R_A et, puisque L_A et R_A commutent, de leur différence Ad_A . On remarque que si A est semblable à B ($B = P^{-1}AP$, $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$), $\theta : M \mapsto P^{-1}MP \in \mathcal{GL}(E)$ et $Ad_B = \theta Ad_A \theta^{-1}$. Autrement dit, Ad_A et Ad_B sont semblables dès que A et B le sont. A présent, si A est diagonalisable, A est semblable à la matrice diagonale $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et Ad_A est semblable à Ad_D . Or, pour chaque matrice élémentaire E_{ij} , $Ad_D(E_{i,j}) = DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ donc la base $(E_{i,j})$ est une base de vecteurs propres pour Ad_D (associés aux valeurs propres $\lambda_i - \lambda_j$). Ainsi Ad_A est diagonalisable.

La réduction simultanée compense les lacunes de structure sur le(s) cône(s) des endomorphismes diagonalisables (et trigonalisable). En effet, on montre que

1. la somme d'endomorphismes diagonalisables qui commutent est diagonalisable (cf exercice 3, page 8).
2. la composée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent est encore diagonalisable.

grâce au résultat de codiagonalisation :

Propriété 2

Si D et Δ sont deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, alors D et Δ sont simultanément diagonalisables si, et seulement si, D et Δ commutent.

7 Deux propriétés antinomiques

"Être nilpotent" et "être diagonalisable" sont des propriétés antinomiques :

$\boxed{\mathcal{F}}$ la seule matrice A à la fois nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle $A = 0$.

Directement, puisque A est diagonalisable, on écrit $A = P\Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale et P inversible. Il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \Delta^k = P^{-1}A^kP$$

donc, avec A nilpotente, Δ est diagonale nilpotente, donc nulle, ce qui assure $A = 0$.

Voici trois utilisations du fait $\boxed{\mathcal{F}}$.

Exercice 3 (Unicité de la décomposition de Dunford, page 6)

On admet la construction d'une décomposition (d, n) de f où d et n sont des polynômes en f . Avec des notations évidentes, soit (d', n') une autre décomposition de f .

$$\text{Puisque } f = d + n = d' + n', \quad n - n' = d' - d.$$

- $f = d' + n'$ commute avec d' et n' puisque $d'n' = n'd'$.
- $dd' = d'd$ puisque d est un polynôme en f . Comme, de plus, d et d' sont diagonalisables, $d' - d$ est diagonalisable.
- De même, n commute avec n' . Comme, de plus, n et n' sont nilpotentes, $n - n'$ est nilpotente.

Bilan : $n - n'$ est nilpotente et diagonalisable donc $n = n'$ (et $d = d'$).

Exercice 4 (Théorème de Burnside)

Soit G un sous-groupe de $\mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $\forall A \in G, A^e = I_p$. Alors G est fini.

Soit $\mathcal{G}$ le sous-espace de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ engendré par G . On complète la partie libre $\odot$ par des éléments de la partie génératrice G pour former une base $(C_1, \dots, C_r)$ de $\mathcal{G}$. Un élément de G est repéré dans la base $(C_1, \dots, C_r)$ mais on cherche un autre système de repérage qui assure la finitude de G . Pour cela, on souhaite plonger (d'un point de vue ensembliste) G dans $\mathbb{C}^r$ par $T : A \mapsto (Tr(AC_k))_{1 \leq k \leq r}$. On suppose momentanément l'injectivité de T prouvée. Pour montrer que G est fini, il suffit de vérifier que $T(G)$ est fini. Un élément de $T(G)$ est un r -uplet, chaque composante du r -uplet étant une somme de p valeurs propres (distinctes ou non) d'un élément

de G . Puisque $X^e - 1$ est un polynôme complexe annulateur de tout élément de G , le spectre global des éléments de G est contenu dans l'ensemble des e racines $e^{\text{èmes}}$ de l'unité et $\text{Card}(T(G)) \leq [(e^p)]^r \leq [e^p]^{p^2}$.

On retourne à l'injectivité de G . Soit A et B dans G telles que $T(A) = T(B)$. On veut $A = B$, i.e $A - B = 0$. La matrice $A - B$ "sort" du groupe, tout comme $AB^{-1} - I$, mais $AB^{-1} - I$ "reste" un peu plus longtemps dans G et fait apparaître la rassurante I . Comment montrer que $AB^{-1} - I$ est nulle ?

* $AB^{-1} - I$ est diagonalisable.

En effet, $AB^{-1} \in G$ l'est car annule le polynôme $X^e - 1$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Soit $P \in \mathcal{G}_n(\mathbb{C})$, D diagonale telles que $AB^{-1} = PDP^{-1}$. Facilement $AB^{-1} - I = P(D - I)P^{-1}$.

* $AB^{-1} - I$ est nilpotente.

On pose $M = AB^{-1}$ et, pour $1 \leq k \leq p$,

$$\text{Tr}(M^k) = \text{Tr}\left(A \underbrace{B^{-1}M^{k-1}}_{\text{combinaison linéaire des } (C_j)}\right).$$

Or $T(A) = T(B)$, donc $\text{Tr}(M^k) = \text{Tr}(B^{-1}M^{k-1}) = \text{Tr}(M^{k-1}) = \text{Tr}(I) = p$. Par la formule de Newton ($M = AB^{-1}$ et I commutent) et la linéarité de la trace, $\text{Tr}((M - I)^k) = p \sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l = 0$.

Aussi, $M - I = AB^{-1} - I$ est nilpotente.

D'où l'injectivité de G et la fin de la preuve.

Exercice 5

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ tel que $\exp(f)$ est diagonalisable. Alors f est aussi diagonalisable.

On écrit, avec des notations évidentes, la décomposition de Dunford de $f : f = d + n$.

- Puisque d et n commutent, $\exp(f) = \exp(d) \exp(n)$ ou $\exp(n) = \exp(-d) \exp(f)$.
- Puisque d est un polynôme en f , d et f commutent donc

$$\exp(-d) \exp(f) = \exp(-d + f) = \exp(f - d) = \exp(f) \exp(-d).$$

Comme, de plus, $\exp(-d)$ (avec d) et $\exp(f)$ sont diagonalisables, la composée $\exp(n) = \exp(-d) \exp(f)$ est aussi diagonalisable.

- Enfin, $\exp(n) - I = n \dots + \frac{1}{(p-1)!} n^{p-1}$ est nilpotent (comme somme de nilpotents qui commutent) et diagonalisable (comme somme de deux diagonalisables qui commutent) donc est nul. Ainsi, le polynôme minimal μ_n de n (un certain X^r) divise $X + \dots + \frac{1}{(p-1)!} X^{p-1}$, donc $\mu_n = X$, $n = 0$ et f est diagonalisable.

8 Caractérisation topologique des éléments de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$

Proposition 5

1. Une matrice complexe N est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est adhérente à la classe de similitude de N .
2. Si une matrice complexe D a une classe de similitude fermée, alors D est diagonalisable.
3. Si une matrice complexe D est diagonalisable, alors la classe de similitude de D est fermée.

On commence par

Lemme 3 Si M est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et si f est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ représenté dans la base canonique B_0 par M , on peut mettre f sous forme trigonale, avec des coefficients arbitrairement petits dans le triangle supérieur strict.

Il existe une base $B = (e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{C}^p$ telle que la matrice $T = \text{Mat}_B(f)$ de f dans B est triangulaire. En notant P la matrice de passage de B_0 à B , $T = \text{Mat}_B(f) = P^{-1}MP$ a la forme :

$$T = \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Pour $t > 0$, on envisage la base $B_t = (e'_1 = te_1, e'_2 = t^2e_2, \dots, e'_p = t^pe_p)$ de $\mathbb{C}^p$ et, si $P_t = \text{Diag}(t, t^2, \dots, t^p)$ est la matrice de passage de B à B_t , la matrice de f dans B_t est

$$T_t = \text{Mat}_{B_t}(f) = P_t^{-1} \text{Mat}_B(f) P_t = P_t^{-1} T P_t = (P P_t)^{-1} M P P_t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ta_{1,2} & \cdots & t^{p-1}a_{1,p} \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ta_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Pour 1 : Soit $N = (n_{i,j})$ une matrice complexe nilpotente. D'après le lemme 3, pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $N_k = (n_{i,j}(k))$ semblable à N et triangulaire telle que $\forall i < j \quad |n_{i,j}(k)| \leq \frac{1}{k}$. Puisque par ailleurs $n_{i,i}(k) = n_{i,i} = 0$, la suite (N_k) converge vers la matrice nulle. Réciproquement, si il existe une suite (N_k) de matrices semblables à N qui converge vers 0, par continuité de $M \mapsto \Pi_M$, la suite (Π_{N_k}) , constante de valeur Π_N , converge vers $\Pi_0 = (-1)^n X^n$, donc $\Pi_N = (-1)^n X^n$ et, par le théorème de Cayley-Hamilton, N est nilpotente.

Pour 2 : Soit D une matrice complexe. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, D est semblable à une matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

et à toutes les matrices triangulaires

$$k > 0, T_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{1}{k}a_{1,2} & \cdots & \frac{1}{k^{p-1}}a_{1,p} \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{k}a_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

La suite (T_k) converge vers la matrice diagonale $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donc, si la classe de similitude de D est fermée, D est diagonalisable semblable à Δ .

Pour 3 : Soit D une matrice complexe diagonalisable. On note $Cl(D)$ sa classe de similitude. Soit (D_k) une suite de $Cl(D)$ qui converge vers $\tilde{D}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme minimal de D_k est $\mu_{D_k} = \mu_D$ donc $\mu_D(D_k) = 0$. Par continuité de $M \mapsto \mu_D(M)$, $\tilde{D}$ annule le polynôme μ_D qui est scindé à racines simples, donc $\tilde{D}$ est diagonalisable. Par continuité de l'application qui à une matrice M associe son polynôme caractéristique Π_M , la suite (Π_{D_k}) constante de valeur Π_D , converge vers $\Pi_{\tilde{D}}$, donc D et $\tilde{D}$ ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres. Comme elles sont de plus diagonalisables, D et $\tilde{D}$ sont semblables, ce qui achève la preuve.

Un piège est d'évoquer une prétendue continuité de $M \mapsto \mu_M$ puis affirmer que $\mu_{\tilde{D}} = \mu_D$ est scindé à racines simples. Pour se convaincre que $M \mapsto \mu_M$ n'est pas continue, on peut considérer

1. la suite de $\mathcal{N}$ de terme général $N_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\mu_{N_k} = X^2$, qui converge vers la matrice nulle de polynôme minimal X
2. ou la suite de $\mathcal{D}$ de terme général $D_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} \end{pmatrix}$ avec $\mu_{D_k} = (X - \frac{1}{n})(X - \frac{2}{n})$, qui converge vers la matrice nulle de polynôme minimal X .

9 Trace de $\mathcal{N}$ et de $\mathcal{D}$ sur le cône des matrices cycliques

Dans le cône $\mathcal{D}$, les matrices à spectre simple sont en position de force. Quel est son analogue dans $\mathcal{N}$? Ce sont les nilpotentes à noyau minimal de dimension 1 (ou de rang maximal $p-1$) (dont l'ensemble est noté $\mathcal{N}_{\max}$) qui ont pignon sur rue dans le cône $\mathcal{N}$. Si $N \in \mathcal{N}$ est semblable à

$$T = P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{p-1,p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et si, pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note ε_k la matrice qui a $\begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,i+1} \neq 0 \\ \frac{1}{k} & \text{sinon} \end{cases}$ en position $(i, i+1)$ et des 0 partout ailleurs, $P(T+\varepsilon_k)P^{-1}$ est nilpotente arbitrairement proche de N et son rang est $p-1$. En effet, le déterminant extrait obtenu en supprimant la dernière ligne et la première colonne de $T+\varepsilon_k$ est non nul par construction. On a montré que le fermé $\mathcal{N}$ est contenu dans l'adhérence de $\mathcal{N}_{\max}$ ou $\overline{\mathcal{N}_{\max}} = \mathcal{N}$.

Exercice 6 Pour $N \in \mathcal{N}$, on a les équivalences

1. N est de rang maximal $p-1$ ou, par le théorème du rang, $\text{Ker}(N)$ est une droite.
2. N est d'indice de nilpotence maximal p .

9.1 Description des générateurs cycliques

Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Lorsqu'on parcourt $\mathbb{C}^p$ à la recherche de générateurs cycliques potentiels, on évite les sous-espaces propres de M puisqu'à la première itération, on a perdu la liberté. Demander à M d'être cyclique, c'est exiger d'abord que ses sous-espaces propres ne soient pas trop gros. Par ailleurs, sous cette condition, un vecteur x de $\mathbb{C}^p$ a des chances d'être cyclique s'il est suffisamment éloigné des sous-espaces propres. Comment cela se traduit-il chez $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$?

Proposition 6

Soit n un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ nilpotent. L'endomorphisme n est cyclique si, et seulement si, n est de rang $p-1$, ou encore $\dim(\text{Ker } n) = 1$.

Pour n nilpotent de rang $p-1$ et pour $x \in \mathbb{C}^p$, on a les équivalences :

1. Le vecteur x est un générateur n cyclique de $\mathbb{C}^p$
2. La famille $(x, n(x), \dots, n^{p-1}(x))$ est une base de $\mathbb{C}^p$
3. Le vecteur x est hors de $\text{Ker}(n^{p-1})$.

Si n est nilpotent et cyclique, n est représenté dans une base par une matrice C compagnon et nilpotente. Son polynôme caractéristique est $\Pi_n = \Pi_C = (-1)^p X^p$ donc C est (la cellule nilpotente de Jordan)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & 0 \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Le rang de } C \text{ est clairement strictement inférieur à } p \text{ et, puisque le déterminant}$$

extrait obtenu en supprimant la première ligne et la dernière colonne de C vaut 1, C est de rang $p - 1$. Réciproquement, si n est nilpotente de rang $p - 1$, on choisit x hors de $\text{Ker}(n^{p-1})$ et on vérifie que les p vecteurs $x, n(x), \dots, n^{p-1}(x)$ sont linéairement indépendants.

Proposition 7

Soit d un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^p$. On a les équivalences :

1. $\mathbb{C}^p$ a des générateurs d -cycliques.
2. Les valeurs propres de d sont deux à deux distinctes.

Dans ce cas, $x \in \mathbb{C}^p$ est un générateur d -cyclique de $\mathbb{C}^p$ si, et seulement si, x a chaque coordonnée non nulle dans une base de diagonalisation.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de vecteurs propres de d associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Un vecteur $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ est générateur d -cyclique de $\mathbb{C}^p$ équivaut à dire que $\{x, \dots, d^{p-1}(x)\}$ est une base de $\mathbb{C}^p$, ce qui se traduit par la non nullité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \lambda_1^{p-1} x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_p & \lambda_p x_p & \lambda_p^{p-1} x_p \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^p x_i \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i).$$

D'où les résultats.

9.2 Commutant

Proposition 8

Soit D une matrice complexe $p \times p$ ayant toutes ses valeurs propres distinctes. Le commutant $\mathcal{C}(D)$ de D est le sous-espace $\mathbb{C}[D]$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et admet $(I, D, \dots, D^{p-1})$ pour base.

On remarque que si θ désigne l'endomorphisme $M \mapsto DM - MD$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $\mathcal{C}(D)$ est exactement le noyau de θ . On note ensuite que D de valeurs propres distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ est diagonalisable semblable à $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Soit alors $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$ tel que $\Delta = P^{-1}DP$. Pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $DM = MD$ équivaut à $\Delta M' = M'\Delta$ où $M' = (m'_{i,j}) = P^{-1}MP$. Or en position (i, j) , le terme de $\Delta M'$ est $\lambda_i m'_{i,j}$ et celui de $M'\Delta$ est $m'_{i,j} \lambda_j$. Ainsi, $M \in \mathcal{C}(D)$ si, et seulement si, $\forall i \neq j, m'_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$, ou encore $\forall i \neq j, m'_{i,j} = 0$ puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, i.e M' est diagonale. Le commutant $\mathcal{C}(D)$ est donc le sous-espace engendré par les p matrices élémentaires $E_{i,i}$. Comme $I, D, \dots, D^{p-1}$ sont aussi dans $\mathcal{C}(D)$, on termine la preuve si on justifie leur indépendance linéaire. Ceci équivaut à l'indépendance de $(I, \Delta, \dots, \Delta^{p-1})$ ou encore à la non nullité du

déterminant de Van der Monde $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix}$, qui est bien vraie puisque les λ_i sont distincts.

Proposition 9

Si n est un endomorphisme nilpotent de rang $p - 1$ de $\mathbb{C}^p$, alors le commutant $\mathcal{C}(n)$ de n est le sous-espace $\mathbb{C}[n] = \{Q(n), Q \in \mathbb{C}[X]\}$ de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^p)$ et admet $(I, n, \dots, n^{p-1})$ pour base.

Soit x_0 dans $\mathbb{C}^p$ hors de $\text{Ker}(n^{p-1})$. On vérifie que la famille $(x_0, n(x_0), \dots, n^{p-1}(x_0))$ à p vecteurs est libre donc est une base de $\mathbb{C}^p$. Clairement $\mathbb{C}[n]$ est contenu dans $\mathcal{C}(n)$. Réciproquement, si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^p)$ est tel que $[n, g] = n \circ g - g \circ n = 0$, g est entièrement déterminé par $g(x_0)$. En effet,

$$g(n^k(x_0)) = n^k(g(x_0)) \quad \text{dès que } 0 \leq k \leq p - 1.$$

Précisément, si $g(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 n(x_0) + \dots + \alpha_{p-1} n^{p-1}(x_0)$, alors $g = \alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 n + \dots + \alpha_{p-1} n^{p-1}$.

9.3 Sous-espaces stables

Proposition 10

Si d est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^p$, les sous espaces stables de d sont en nombre fini si, et seulement si, les sous espaces propres de d sont des droites, ce qui revient à dire que d est diagonalisable à spectre simple.

Si d a un sous-espace propre E de dimension supérieure à 2, on choisit une famille libre $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de E et toute droite $\mathbb{C}(\varepsilon_1 + \lambda \varepsilon_2)$ de E (il y en a une infinité puisque λ est un scalaire arbitraire de $\mathbb{K}$) est stable par d . Réciproquement, si chaque sous espace propre est une droite, le nombre de sous-espaces propres est p . On appelle $E_1, \dots, E_p$ les droites propres. Tout sous-espace d stable F s'écrit $F = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} F_i$ avec $F_i \subset E_i$.

Nécessairement, $F_i = \{0\}$ ou $F_i = E_i$, ce qui donne au total 2^p possibilités pour F .

Proposition 11

1. Les sous-espaces de $\mathbb{C}^p$ stables par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

sont en nombre fini $(p+1)$ et sont exactement les noyaux des puissances de N .

2. Si n est un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on a les équivalences :

- (a) Les sous espaces stables de n sont en nombre fini.
- (b) Le noyau de n (le seul sous espace propre de n) est une droite.

Pour 1 : La matrice N est de rang $p-1$ (considérer le déterminant extrait obtenu en supprimant la dernière ligne et la première colonne) donc son noyau est une droite. Le calcul des puissances de N est facile puisque la sur-diagonale de 1 s'échappe vers le haut à chaque itération. Pour $1 \leq i \leq p$, N^i a donc ses i premières colonnes remplies de 0 donc $\dim(\text{Ker } N^i) \geq i$, et toujours par déterminant extrait, $\text{rg}(N^i) \geq n-i$, ce qui donne en définitive

$$\dim(\text{Ker } N^i) = i.$$

Soit F un sous-espace de $\mathbb{C}^p$ de dimension i stable par N . On envisage l'endomorphisme $\tilde{N}$ induit par N sur F qui est, comme N , nilpotente. Ainsi, $\tilde{N}^i = 0$ donc $\forall X \in F$, $N^i X = 0$, ce qui signifie $F \subset \text{Ker } N^i$. Pour des raisons de dimension, F est exactement le noyau de N^i .

Pour 2 : L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ s'obtient par contraposition comme dans la proposition précédente. Réciproquement, on choisit un vecteur e hors de $\text{Ker } n^{p-1}$ et la matrice de n dans la base $(n^{p-1}(e), \dots, n(e), e)$ est N . D'où le résultat avec le (1).