Université de Montpellier II

Agrégation de Mathématiques
(2005-2006)

Topologie

Jérôme Droniou [1].

Les exercices avec des étoiles * *devraient être assez immédiats...*

Exercice 1 * On définit sur $\mathbb{C}$ la "métrique SNCF":

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - z_2| & \text{si } \arg(z_1) = \arg(z_2), \\ |z_1| + |z_2| & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que d est bien une distance. Décrire la boule de centre z et de rayon r pour cette distance. Montrer que, si $z_0 \neq 0$, $f_{z_0}(z) = z + z_0$ n'est pas continue pour cette métrique; qu'en est-il de f_0?

Exercice 2 * Soit X un ensemble et

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que d est une distance sur X. Décrire la topologie associée. Décrire toutes les applications continues $\mathbb{R} \to X$ ($\mathbb{R}$ étant muni de sa topologie usuelle); même question pour les applications continues $X \to \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit X un ensemble, Y un espace topologique et $f : X \to Y$. Existe-t-il une topologie sur X qui rende f continue? Peut-on dire qu'il y en a une de privilegiée? Relier cette topologie à celle, lorsque Y et Z sont des espaces topologiques, de la topologie produit sur $Y \times Z$.

Exercice 4 *(Topologie sur un produit quelconque d'ensembles)* Soit $(X_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques. On définit une topologie sur $X = \prod_{i \in I} X_i$ de la manière suivante: U est un ouvert de X si, pour tout $x \in U$, il existe un ensemble de la forme

$$\prod_{i \in J} U_i \times \prod_{i \notin J} X_i = \{(y_i)_{i \in I} \in X \mid \forall i \in J\ ,\ y_i \in U_i\},$$

avec $J \subset I$ fini et U_i ouvert de X_i (pour tout $i \in J$), qui contienne x et soit inclus dans U *(on a défini la topologie de* X *en donnant une base d'ouverts).* Montrer que ceci définit bien une topologie sur X. Montrer que toutes les projections $P_k : (x_i)_{i \in I} \in X \to x_k \in X_k$ sont continues pour cette topologie et que, en fait, cette topologie est la plus petite qui rende toutes ces projections continues.
On se donne une suite $(x^n)_{n \geq 1}$ d'éléments de X. Montrer que $x^n \to x$ pour la topologie de X si et seulement si, pour tout $i \in I$, $x_i^n \to x_i$ *("convergence simple").*

Exercice 5 Montrer qu'une intersection décroissante de compacts connexes est compact connexe. Qu'en est-il si on supprime l'hypothèse de compacité?

[1] Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France. email: `droniou@math.univ-montp2.fr`

Exercice 6* Soit K un compact métrique et $f : K \to K$ une application vérifiant: pour tous $(x,y) \in K$, $x \neq y$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Montrer que f a un unique point fixe *(on pourra par exemple considérer la fonction $x \in K \to d(f(x),x) \in [0,\infty[$).* Qu'en est-il si on supprime l'hypothèse de compacité?

Exercice 7 Soit K un compact métrique et $f : K \to K$ une application continue dilatante (i.e. $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$). Montrer que f est en fait une isométrie *(on pourra, une fois $x \in K$ et $y \in K$ choisis, considérer des suites $f^{(n_k)}(x)$ et $f^{(n_k)}(y)$ qui convergent, puis montrer que $f^{(n_{k+1}-n_k)}(x) \to x$, et se rappeler que $n_{k+1} - n_k \geq 1$).* Montrer que f est surjective *(la réponse est quasiment dans l'indication précédente!).*

Exercice 8 Soit D un ensemble dense dans $I = [0,1]$ et $f : D \to I$ croissante dont l'image est dense dans I. Montrer que f se prolonge en une application continue croissante $I \to I$. Qu'en est-il si on enlève l'hypothèse de croissance, mais en rajoutant que f est continue sur D?

Exercice 9 *Les ensembles de cantor*
On considère $I = [0,1]$ et une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels dans $]0,1[$.
On construit par récurrence les ensembles $(I_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante: $I_1 = I$; une fois $I_n = \sqcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n,k}$ (réunion disjointe d'intervalles) construit, on enlève à chaque $J_{n,k}$ un intervalle ouvert de longueur λ_n fois celle de $J_{n,k}$, centré au milieu de $J_{n,k}$, ce qui nous donne deux intervalles $J_{n,k}^1$ et $J_{n,k}^2$ pour chaque $J_{n,k}$; I_{n+1} est définit comme l'union de tous ces intervalles $(J_{n,k}^i)_{k=1,\ldots,2^{n-1};i=1,2}$.
Le Cantor associé à la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est l'intersection de tous les $(I_n)_{n\geq 1}$ ainsi construits. Le Cantor associé à $\lambda_n \equiv 1/3$ est appelé Cantor triadique.

i) Montrer que tout ensemble de Cantor est un compact non vide totalement discontinu (i.e. toutes ses composantes connexes sont réduits à des points). En particulier, les ensembles de Cantor sont d'intérieur vide.

ii) Montrer que les ensembles de Cantor sont parfaits (i.e. qu'ils n'ont pas de point isolé).

iii) Soit K et K' deux ensembles de Cantor, associés à des suites $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ et $(\lambda'_n)_{n\geq 1}$. Construire un homéomorphisme $I \to I$ qui envoie K sur K' *(on pourra commencer par construire une application strictement croissante et surjective $I \backslash K \to I \backslash K'$ en envoyant affinement chaque intervalle enlevé à $J_{n,k}$ sur l'intervalle correspondant enlevé à $J'_{n,k}$; puis on montrera que cette application se prolonge en un homéomorphisme $I \to I$, en se servant par exemple de l'exercice 8).*

iv) *(Demande les bases en théorie de la mesure)* Calculer la mesure du Cantor triadique. Montrer que, pour tout $l \in [0,1[$, on peut choisir une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels dans $]0,1[$ telle que la mesure du Cantor correspondant soit exactement l. *(les Cantors de mesure non-nulle sont appelés "Cantor gras").* Déduire de ceci que tous les ensembles de Cantor sont non-dénombrables.

v) *(Escalier de Cantor)* On considère ici le Cantor triadique K_3. On construit une application $f : I \backslash K_3 \to I$ de la manière suivante: en numérotant les $(J_{n,k})_{k=1,\ldots,2^{n-1}}$ de manière croissante (i.e. $\sup(J_{n,k}) \leq \inf(J_{n,k+1})$), sur l'intervalle enlevé au milieu de $J_{n,k}$, on pose $f \equiv \frac{2k-1}{2^n}$. Montrer que f se prolonge en une application continue $I \to I$, qui croit de 0 à 1 tout en étant dérivable presque partout et de dérivée nulle (!).