La mesure dans les Éléments d'Euclide

Introduction

Les Grecs ont apporté une solution au problème de la mesure des grandeurs posé par l'échec des pythagoriciens. La solution étudiée ici est celle d'Eudoxe telle qu'elle apparaît dans les Éléments d'Euclide. Pour cela nous présenterons d'abord les hommes derrière ce problème puis les Éléments, et les utilisations des grandeurs dans le livre V majoritairement mais aussi dans quelques autres livres où elles apparaissent.

Les hommes

Pythagore de Samos

Pythagore de Samos (~ -569, ~ -475) fut un philosophe, mystique et mathématicien qui a fondé une secte à Crotone (Italie du sud) vers -515. Cette secte était très structurée et ésotérique : les interdits étaient nombreux et pour aujourd'hui étranges (par exemple l'interdiction de manger des haricots). Les découvertes des disciples étaient données au maître ce qui fait qu'on ne sait pas exactement à qui attribuer les découvertes de la secte. Durant 5 ans les nouveaux arrivants ne pouvaient qu'écouter et non pas lire les mathématiques, les connaissances étaient réservées à une élite : les adeptes. Cette secte innova aussi en acceptant les hommes et les femmes. Ses intrigues politiques amenèrent sa destruction vers -460, les survivants s'éparpillèrent.
On leur attribue par exemple la somme des mesures des angles d'un triangle valant deux angles droits, le théorème de Pythagore ou la découverte des 5 polyèdres réguliers. Les pythagoriciens considéraient que tout est nombre (entier supérieur à 1) et que les rapports entre toutes les grandeurs s'exprimaient comme des rapports de nombres entiers, ce qui s'appliqua en musique avec la théorie de l'harmonie des monocorde vibrants.
Cette théorie fut ruinée par la découverte que la diagonale du carré n'est pas en rapport de nombres entiers avec son côté. En effet, ce rapport vaut $\sqrt{2}$ qui n'est pas un nombre rationnel. Ceci ne fut probablement pas trouvé par Pythagore.

Eudoxe de Cnide

Eudoxe de Cnide (-408, -355) fut l'élève d'Architas de Tarente (~ -428, ~ -350) qui fut un philosophe et un mathématicien pythagoricien. Eudoxe était mathématicien, théologien, astronome. Son système astronomique géocentrique reprend celui de Pythagore.
Il a étudié le problème de la duplication du cube et résolu celui de l'identité de raisons, même si les grandeurs ne sont pas commensurables tout en étant archimédiennes. Par exemple $\sqrt{2}$ a une raison avec 1 parce qu'ils peuvent se

surpasser mutuellement : $1 < \sqrt{2}$ et $2 \times 1 > \sqrt{2}$.

Euclide d'Alexandrie

Euclide d'Alexandrie (~ -325, ~ -265) est le mathématicien de l'Antiquité le plus connu de par la rédaction de ses Éléments. Diverses hypothèses sur sa nature sont posées mais il est couramment admis qu'il fut un mathématicien en chair et en os qui a fondé une école de mathématiques à Alexandrie et que son nom ne cache pas un collectif comme aujourd'hui Bourbaki.
Il reprend la théorie des grandeurs d'Eudoxe en particulier dans le livre V et celle des irrationnels de Thééthète dans le livre X.

Les Éléments d'Euclide

Les Éléments sont une compilation de théorèmes et de constructions géométriques et arithmétiques qui organise logiquement, thématiquement mais non historiquement une grande partie des connaissances de son temps. Il manque par exemple les coniques (à propos desquelles Euclide a écrit un livre perdu) ou les constructions par ajustement (ou neusis).
Ils sont organisés comme suit :
Les quatre premiers livres contiennent la géométrie élémentaire (parallélisme, égalités d'aires, propriétés du cercle, polygones réguliers).
Le livre V traite des proportions abstraites, appliquées en géométrie dans le livre suivant.
Les livres VII à X contiennent l'arithmétique (divisibilité, nombres premiers, parfaits, suites, irrationnels).
Les livres XI à XIII traitent de la géométrie dans l'espace en y étendant les propriété des premiers livres (parallélisme, volumes, polyèdres réguliers).
Il existe aussi deux livres apocryphes.

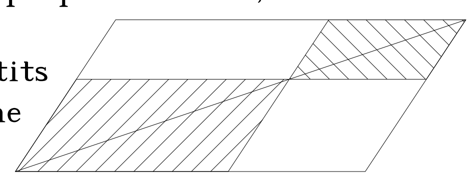
Les grandeurs dans les Éléments

Avant le livre V

Le livre I contient 5 notions communes dans les traductions de Heath et de Vitrac et 9 dans la traduction de Peyrard. Elle concernent des choses ou grandeurs —selon la traduction—, mot qui n'est lui-même pas défini. On les a aussi traduits comme axiomes, évidents pour le lecteur mais nécessitant tout de même leur mention dans les Éléments.
Les trois premières notions communes servent à garantir au sens moderne, que l'égalité de grandeurs est une relation d'équivalence compatible avec l'addition et la soustraction. Le quatrième énonce que la relation est conservée par superposition géométrique et la dernière que le tout est plus grand que la partie.
Voici leurs énoncés :
NC 1 : Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
NC 2 : Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
NC 3 : Si à des grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

Quelques autres axiomes du même type sont présents dans les Éléments mais non explicités, par exemple « $x \neq y$ implique ($x<y$ ou $x>y$) » est utilisé dans I-6.
Jusqu'au livre IV inclus les comparaisons entre grandeurs seront limitées à des cas simples comme :

- comparaison de plusieurs grandeurs égales,
- comparaison après addition ou soustraction,
- comparaison du double ou de la moitié ; ces deux dernières relations étaient précisées par des notions communes apocryphes présentes dans la version de Peyrard,
- quelques inégalités sont aussi présentes comme dans la proposition I-18,

Voici quelques exemples de propositions :

La proposition I-43 énonce l'égalité des aires de petits parallélogrammes blancs situés de part et d'autres d'une diagonale du parallélogramme.
La proposition I-32 énonce l'égalité de la somme des mesures des trois angles d'un triangle avec deux angles droits.
Dans un cercle, l'angle au centre est démontré valant le double de l'angle inscrit dans la proposition III-20.
Enfin, la proposition II-8 présente une égalité comportant une grandeur multipliée 4 fois.
Dans toutes ses propositions on se limite aux rapports de petits nombres entiers.
Précisons qu'il est bien évident que ce qu'on comprend aujourd'hui comme une multiplication dans le calcul de l'aire d'un rectangle n'était pas compris comme tel par Euclide et qu'il n'est pas possible d'écrire qu'une comparaison de grandeurs passe

par leur multiplication. Tout au plus pouvons-nous écrire qu'Euclide compare les aires de carrés et de rectangles comme dans le livre II.

Les définitions du livre V

Je citerai les définitions telles qu'elles sont présentées dans la traduction de Peyrard parce que couramment utilisée (et parce que j'en ai le texte) mais j'utiliserai la numérotation commune à Heath et Peyrard parce que plus fiable.

Les définitions 1 et 2

Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.
Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.
La traduction de Heath sur laquelle est basée celle de Vitrac utilise la mot « chose » au lieu de « grandeur », ce qui rend encore plus abstrait ce livre.
Ces deux définitions sont « réciproques » l'une de l'autre. Elles utilisent le verbe « mesurer » qui n'est pas défini mais une grandeur en mesure une autre si elle peut être reproduite un nombre entier de fois pour coïncider exactement avec la plus grande, ce qu'on retrouve dans la définition VII-3 où il s'agit de nombre et non plus de grandeurs abstraites.
Les grandeurs doivent être de même nature, on ne peut pas comparer un nombre et une surface par exemple.

La définition 3

Une raison, est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.
Il ne s'agit plus seulement d'une égalité comme dans les livres précédents ou de comparaison peu précise comme dans la proposition I-18. mais d'une relation de comparaison quantitative entre une paire de grandeurs homogènes (de même nature) ; par exemple l'une d'elle mesure-t-elle l'autre et combien de fois, ou ont-elles une mesure commune et combien de fois les mesure-t-elle ?
Il faut ajouter que la notion de grandeurs commensurables (ou ayant une mesure commune) n'apparaît qu'au livre X.
La traduction de Peyrard donne entre les définitions 3 et 4 une définition apocryphe (et signalée comme douteuse) de la proportion : une identité de raisons.

La définition 4

Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.
Ces grandeurs sont dites archimédiennes en langage moderne, non seulement elles doivent être de même nature mais en plus deux grandeurs G et G' vérifiant cette définition doivent vérifier ceci : $\exists n,m \in \mathbb{N}$ tels que $nG>G'$ et $mG<G'$. Cette propriété

est attribuée à Eudoxe par Archimède.
Les angles curvilignes sont prévus en creux par les définitions I-8 et I-9, la proposition seule proposition des Éléments les mentionnant est III-16 qui démontre que tout angle formé par une tangente et un cercle est plus petit que n'importe quel angle rectiligne. Un tel angle ne peut donc pas avoir de raison avec un angle rectiligne.
Toutes les autres grandeurs des Éléments d'Euclide sont archimédiennes.

La définition 5

Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent les seconds équimultiples, ou leurs sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.
En utilisant les notations modernes on peut l'interpréter ainsi :
Si a, b, c et d sont des grandeurs archimédiennes homogènes (a et b d'un côté, c et d de l'autre), on a :

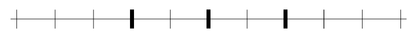
$$a:b::c:d \Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \left| \begin{array}{l} ma > nb \text{ et } mc > nd \\ ma = nb \text{ et } mc = nd \\ ma < nb \text{ et } mc < nd \end{array} \right.$$

Les grandeurs a et b doivent être de même nature, c et d aussi mais les quatre ne sont pas tenues de l'être ainsi a et b peuvent être des angles et c et d des aires.
La définition 4 est bien nécessaire ici pour avoir le droit d'écrire qu'un équimultiple choisi de a sera plus grand qu'un équimultiple de b. La relation d'ordre n'a cependant pas été déclarée totale, c'est-à-dire qu'il est écrit nulle part dans les Éléments que deux grandeurs de même nature peuvent être comparées.
À la manière algébrique moderne, cela donne :

$$a:b::c:d \Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \left| \begin{array}{l} \frac{a}{b} > \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{n}{m} \\ \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{n}{m} \\ \frac{a}{b} < \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{c}{d} < \frac{n}{m} \end{array} \right.$$

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales quand quelle que soit la fraction $\frac{n}{m}$, cette dernière est supérieure à $\frac{a}{b}$ et à $\frac{c}{d}$ en même temps, ou égale aux deux ou inférieure aux deux.

Il n'est donc pas possible d'intercaler de fraction entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ comme dans l'illustration ci-dessous :



$$\frac{a}{b} \quad \frac{m}{n} \quad \frac{c}{d}$$

Dedekind dit s'en être inspiré pour la définition des coupures.
La définition V-5 recouvre celle de la proportionnalité de deux nombres dans la définition VII-20 :
Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.
Cette définition peut se comprendre aujourd'hui comme une restriction de la définition V-5 aux fractions d'entiers. En effet, les nombres sont pour Euclide les nombres entiers supérieurs à 2, sa définition donnée en VII-2 est :
Un nombre est un assemblage composé d'unités.
Il est étonnant de trouver cette définition plus faible après la puissante définition V-5 d'autant plus que dans le livre X Euclide considère les nombres comme des grandeurs, par exemple dans la proposition X-5 :
Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.
Rappelons que des grandeurs sont commensurables quand elles ont une mesure commune, c'est-à-dire une grandeur qui est un diviseur entier sans reste des deux.

Exemples d'applications de la théorie des grandeurs

Nous allons étudier la théorie des proportions dans deux propositions des Éléments qui l'utilisent : V-16 avec des grandeurs abstraites de même nature et VI-1 avec des grandeurs géométriques non-homogènes.
Il est utile de préciser tout d'abord que certaines propositions du livre V nécessitent des grandeurs homogènes (V-14 ou V-16) alors que d'autres non (V-4 ou V-23), et Euclide ne le précise pas.

Cas de grandeurs abstraites dans V-16

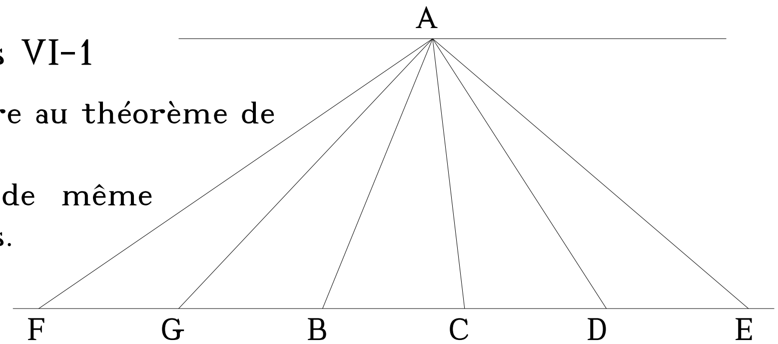
La proposition V-16 énonce que l'on peut échanger les termes de deux proportions égales :
Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.
En clair, si les grandeurs sont homogènes et si a:b :: c:d alors a:c :: b:d.
Voici la preuve réécrite en langage moderne :

Soient m et n des nombres.
On a : a:b :: ma:mb :: c:d (selon respectivement V-15 et V-11)
De même : c:d :: nc:nd :: a:b
Donc ma:mb :: nc:nd, soit selon V-14 qui utilise quatre grandeurs homogènes :

si $ma>nc$ alors $mb>nd$
si $ma=nc$ alors $mb=nd$
si $ma<nc$ alors $mb<nd$
Donc d'après la définition V-5 de l'égalité de proportions, a:c :: b:d.

La définition V-5 est utilisée après avoir manipulé des équimultiples.

Cas de grandeurs géométriques dans VI-1



La proposition VI-1 est le lemme nécessaire au théorème de Thalès VI-2 :
Les triangles et les parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

La preuve n'utilise que la proposition I-38 et la définition V-5 :
Les triangles de sommet A et de bases égales respectives FG, GB, BC, CD et DE ont la même aire.
En choisissant des équimultiples, si la base est plus petite, l'aire est plus petite, si la base est égale, l'aire est égale, et si la base est plus grande, l'aire est plus grande.
Donc les aires sont entre elles comme les bases.

Ici Euclide utilise directement la définition V-5.

Cas des nombres dans VII-13

La proposition VII-13 est l'analogue de V-16 pour les nombres :
Si quatre nombres sont proportionnels ; ils seront encore proportionnels par permutation.
La preuve est la suivante :
a:b :: c:d donc a a la (ou les) même(s) partie(s) de b que c de d.
Donc selon la proposition VII-10, a a la (ou les) même(s) partie(s) de c que b de d.
Soit a:c :: b:d.

La preuve de VII-10 décompose les nombres en parties et utilise leur spécificité, ce qui est impossible pour des grandeurs abstraites, plus proche des nombres réels modernes que des nombres entiers.

Résumé

Que les grandeurs soient abstraites ou non, de même nature ou non, Euclide —du moins dans les livres V et VI— les traite de la même manière : non pas comme des nombres, la comparaison est abstraite et utilise la définition d'Eudoxe V-5. En revanche les livres d'arithmétique utilisent la définition plus ancienne historiquement VII-20 et son fonctionnement induit : comparer des parties directement au lieu de leurs équimultiples.

Conclusion

La théorie des grandeurs des Éléments est fondée sur celle d'Eudoxe, elle a pour « centre » la définition V-5. Son intérêt est de pouvoir comparer des grandeurs archimédiennes de nature identique mais aussi et surtout de natures différentes. Son utilisation effective est plus complexe puisqu'en réalité les grandeurs sont utilisées de plusieurs manières :

- Le mot n'est déjà pas défini dans les Éléments,
- Les premiers livres utilisent les grandeurs géométriques sans théorie particulière en soubassement, les comparaisons effectuées sont simples,
- Les grandeurs abstraites sont utilisées à partir du livre V, elles ont comme application les comparaisons élaborées de grandeurs géométriques dans le livre VI et de nombres et de grandeurs dans le livre X,
- Les livre VII à IX utilisent les mêmes notions que le livre V mais en se limitant aux nombres entiers, les comparaisons et les preuves utilisent leur spécificité.

Bibliographie, ouèbographie

- Les Œuvres d'Euclide, trad. Peyrard, Blanchard, 1993, Paris
- Les Éléments d'Euclide, trad. Vitrac, PUF, 1990-2001, Paris
- Euclid's Elements, arr. Joyce,
  http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

Table des matières