Nicolas Patrois

Mémoire de déa
Épistémologie et histoire des sciences

Frege
ou la restitution du lieu propre de l'arithmétique et de la logique
Quel bilan ?

Dirigé par :
M. Jean-Jacques Szczeciniarz
et
M. Jean-Pierre Belna

Université Paris 7 - Denis Diderot

Remerciements

Je remercie Alain Dubuisson pour l'idée de la chose même et pour les pistes philosophiques ainsi que René Guitart pour m'avoir fait connaître Frege

Je remercie aussi Jean-Jacques Szczeciniarz et Jean-Pierre Belna pour leurs critiques, commentaires, relectures et pour leur direction

I Vers la rigueur en mathématiques : la position historique de Frege

I.A Algébrisation et symbolisation

L'histoire de l'algébrisation, du symbolisme en mathématique peut remonter aux algébristes du XVIe siècle, qui usèrent d'abréviations pour remplacer l'algèbre dite syncopée, où tout était écrit en langue commune ou en latin (et avant en arabe). Ces abréviations furent d'abord confuses, peu utilisables, équivoques : chaque mathématicien avait ses propres notations des inconnues et des paramètres, des opérations, des puissances ; celles d'un mathématicien recouvraient parfois celles d'autre ou pas. De plus, ces notations devaient être souvent correctement interprétées du fait par exemple de l'absence de parenthèses. Les notations se sont stabilisées vers la fin du XVIe siècle et par exemple les œuvres mathématiques de Descartes, datant du début du XVIIe siècle, sont lisibles dans le texte sans effort d'interprétation.

La réussite, le succès de ces notations, remplaçant de manière efficace et puissante le lourd texte, sa facilité d'usage et de manipulation, et son usage dans d'autres sciences que l'algèbre (analyse, astronomie…) en ont fait espérer un usage universel, par exemple en vue de développer et de rationaliser la science ou de l'appliquer à la logique.

Leibniz est des savants qui ont eu cet espoir ; ainsi il a imaginé une manière de combiner des pensées, remplacées pour les besoin de son calcul par des nombres entiers. Il a eu comme rêve une langue caractéristique universelle (usant d'une langue spécifique) qui est en même temps un calcul du raisonnement (calcul infaillible) ; cette langue spécifique devait permettre de résoudre sans heurt n'importe quelle controverse : Un désaccord ? Calculons ! D'autres mathématiciens au cours du XVIIIe siècle ont continué la recherche en logique, comme Lambert ou Euler.

Boole au milieu de XIXe siècle, a lui créé une méthode de calcul algébrique, qui utilise le même symbolisme que l'algèbre usuelle, mais appliqué au calcul des ensembles (*primary propositions*) et des jugements (*secondary propositions*). Il sera suivi par d'autres logiciens comme Jevons ou Pierce. Cependant, et Frege l'expliquera[1], ces notations sont équivoques donc impropres à un usage en logique.

Frege restreint sa logique : elle est une langue caractéristique, mais non universelle pour le moment bien qu'elle en ait la prétention à moyen terme[2].

I.B Rigueur et méthode axiomatique

Un autre mouvement de fond en mathématiques vers les mêmes époques, est celui de la recherche vers une rigueur accrue voire absolue en mathématiques.

1 Contre les notations de Boole, voir par exemple [ÉLP], *Sur le but de l'idéographie*, pages 70 et suivantes, mais aussi dans ce mémoire page 15 et suivantes avec l'exemple de a+b=1.

2 [ÉLP], *La science justifie le recours à une idéographie*, page 69.

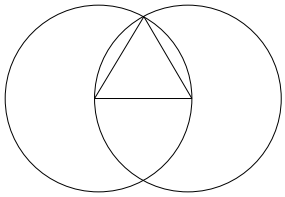
En effet, les développements consécutifs à la puissance du symbolisme algébrique ont, par manque de rigueur dirait-on aujourd'hui, conduit à quelques paradoxes comme par exemple celui de la série divergente $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$, déjà Leibniz débattait pour savoir si sa somme valait 0, 1 ou 0,5. De la même manière, l'égalité fausse $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{-2\times-3}=\sqrt{6}$ posa un problème au XVIIIe siècle (en effet, en notation moderne 2i×3i=−6 et non 6, la notation $\sqrt{-2}$ posant ici problème étant donné la non univocité de la fonction racine carrée dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et la validité de cette propriété multiplicative seulement dans $\mathbb{R}$).

Suite à ces paradoxes, Cauchy posa le problème de la rigueur en analyse à la frontière entre les XVIIIe et XIXe siècles. Par exemple il ne considéra plus comme évident le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue. Bien que sa preuve se contente d'un constat visuel sur un graphe, ce qui ne suffit pas selon les canons actuels de la rigueur, il a au moins posé le problème. Il sera suivi dans cette démarche par Bolzano ou Weierstrass.

Cette quête de rigueur en analyse sera perturbée entre autres par l'apparition de fonctions monstrueuses, continues partout et nulle part dérivables ou d'autres continues nulle part, qui mirent en cause les corrélations trop simplistes entre fonction, continuité, tracé au crayon en un seul trait et dérivabilité. Cela obligea les mathématiciens à remonter à la source du problème : une mise au clair des notions sous-jacentes. D'abord de celle de nombre elle-même, d'où la construction des nombres réels par Dedekind et une analyse de cette notion pour encore remonter plus profondément à la source, la notion de nombre entier, puis à la racine : la construction axiomatico-logique de ces nombres entiers.

Il reste à fonder la logique sur autre chose que sur du sable, ce à quoi s'emploie Frege, la validité et la solidité des mathématiques entières y repose.

Ainsi la construction rigoureuse des mathématiques, et le nettoyage qui s'ensuit, repose sur une construction axiomatico-déductive, qui interdit l'introduction discrète, implicite voire malhonnête de notions prétendument évidentes. Ainsi Euclide a été contesté dès la proposition 1 du livre I[1], où il demande de construire un triangle équilatéral. Il trace les deux cercles sur le segment horizontal et affirme qu'ils se coupent. Euclide utilise ici un axiome de continuité du tracé du cercle, voisin de l'axiome de Pasch (si une droite coupe un côté d'un triangle alors elle en coupe un deuxième). Autre erreur d'Euclide selon Frege, il définit le triangle équilatéral[2] avant de vérifier son existence[3] (notons qu'Euclide fait de même pour le carré, défini dans la définition 30[4] du livre I alors que sa construction est justifiée proposition 46 du livre I[5]). Or Frege refuse toute définition créatrice de l'objet défini, toute définition qui permettrait de



1 *Éléments* d'Euclide, page 3.
2 *Ibid.*, définition 24 du livre I, page 2.
3 *Ibid.*, dans le théorème 1 du livre I, page 3.
4 *Ibid.*, page 2.
5 *Ibid.*, page 37.

démontrer alors que son absence ne le permettrait pas. Une définition n'est qu'une abréviation commode[1]. Ainsi :

> « [o]n exige maintenant une preuve pour des propositions tenues jusqu'ici comme évidentes. »[2]

I.C Le projet de Frege

À peu près au même moment, plusieurs mathématiciens et logiciens se posent les mêmes questions que Frege[3] : reconstruire les mathématiques, et pour commencer construire une arithmétique rigoureuse. Le projet de Frege — qui s'inscrit à cette époque parfaitement dans ce mouvement général — veut aller plus loin dans la fondation du lieu mathématique, et c'est son intérêt. L'arithmétique est fondée *a priori* et épurée de toute intrusion et naïveté psychologique. Pour cela il élimine tout recours à l'intuition, à l'implicite dans les déductions mathématiques, ceci dans le but de rendre évidente chaque étape de la preuve, mais aussi pour ne rien cacher au lecteur, pour rendre la preuve incontestable. Ceci nécessite un nouveau symbolisme qui doit : être univoque, saisir immédiatement la chose même de la discipline en question et avoir des principes premiers évidents; ceci en vue de reconstruire rigoureusement, sur des bases saines et évidentes, la logique puis l'arithmétique et ensuite toute science qui s'y prête.

Le problème qui se pose est celui-ci : comment la fondation des mathématiques, science *a priori* et logique, tout en en ayant éliminé les résidus de psychologie, peut-elle malgré tout être féconde et rigoureuse, et ce projet a-t-il réussi ?

Pour y répondre, nous allons suivre la méthode frégéenne, à savoir descendre du général au particulier, des principes théoriques vers la construction effective, et pour cela nous allons nous pencher sur l'exemple le plus exemplaire : la construction du nombre entier, exemple qui amènera des préalables en vue de clarifier ce projet et ses principes (comment Frege prépare philosophiquement sa construction des nombres), puis de multiples questions qui vont aboutir à un constat sur l'échec de la logique de Frege.

1 [ÉP], *La logique dans les mathématiques* [1914], page 247.
2 [FA], paragraphe 1, page 125.
3 Dedekind, Cantor, Peano…

II Comment Frege parvient à délimiter le lieu arithmétique, fondé sur des jugements *a priori*

Avant de pouvoir étudier la construction du nombre entier proprement dite, il est nécessaire d'étudier les principes qui la sous-tendent, ceux-ci sont exposés entre autres dans les textes des *Écrits logiques et philosophiques* mais aussi dans les *Fondements de l'arithmétique*, qui est en fait un préalable philosophique aux *Lois fondamentales*, texte logico-mathématique.

Ainsi, dans un mouvement de descente au cœur du problème, nous allons étudier chez Frege la nécessité de l'autonomie de l'arithmétique vis-à-vis des autres sciences, la logique exceptée, pour en venir aux rapports de la pensée et du langage en vue de fonder une nouvelle langue idéale, une idéographie rigoureuse sans être un formalisme vide de sens.

II.A Réhabilitation de la spécificité du domaine mathématique contre l'empiètement des sciences empiriques

La critique du psychologisme, doctrine selon laquelle toute vérité en science n'est qu'une représentation psychologique et individuelle, et donc soumise à la psychologie scientifique, est selon Frege au fondement de la constitution d'une science autonome, dont les frontières avec les autres sciences sont nettes. Sans cela tout n'est que confusion. Nous allons suivre la critique frégéenne de la représentation comme critère de vérité en mathématiques, pour aboutir à l'élucidation de la nature même de l'arithmétique.

II.A.1 Critique du psychologisme

II.A.1.a La représentation n'est pas la pensée

En effet, il existe une différence fondamentale et radicale de nature entre la représentation et la pensée. La première est un tableau qui se forme psychologiquement, par association. Elle est subjective, empirique et liée au sensible, même si elle présente une apparence de généralité. La représentation étant formée, elle est sujette à variation et au temps. Au contraire la seconde est éternelle, universelle, non modifiable et objective[1]. On retrouve ici la critique de *Qu'est-ce qu'une fonction ?*[2] de la variable en arithmétique ; en effet elle est susceptible de variation, or le nombre 2 est fixe, et même une indéterminée a car bien qu'inconnue, sa valeur n'est pas sujette à variation.

L'abstraction, procédé de représentation, ne fabrique pas de l'objectif, le subjectif combiné au subjectif ne fabrique que du subjectif, et l'objectif combiné à l'objectif ne fabrique que de l'objectif. De plus l'objectif ne vient pas du

1 [ÉLP], *Compte rendu de Philosophie der Arithmetik I*, pages 145 et 146.

2 *Ibid.*, *Qu'est-ce qu'une fonction ?*, pages 161 et suivantes.

subjectif ou de ce qui se passe dans le cerveau de quiconque, en un mot des représentations[1]. Frege refuse en effet l'intervention du psychologique, de la prétention de la psychologie à dicter les lois mathématiques et logiques car il refuse le mélange des deux, par exemple il refuse l'expression de « représentation objective » qui désigne en fait les objets et les concepts utilisés par Frege, mais pour éviter toute erreur vu l'usage, il n'utilise le mot représentation que dans le sens de subjectif[2].

Pour résumer, Frege conteste la confusion entre le sensible et l'intelligible, et s'attache à fonder la logique et l'arithmétique non pas sur les représentations mais sur les objets logique et arithmétique eux-mêmes :

> « Les liaisons qui font l'essence de la pensée sont foncièrement différentes des associations entre représentations. »[3]

La séparation est nette et radicale.

II.A.1.b La représentation est foncièrement subjective

Le problème de fond, et que nous n'avons qu'esquissé pour le moment, est que la représentation est en soi subjective. Ainsi l'impression individuelle du rouge est intraduisible, incommunicable à la conscience d'autrui en ce sens que personne n'est certain d'avoir la même représentation mentale du rouge qu'autrui[4]. Une représentation est donc strictement individuelle, personnelle[5].

Précisons, une représentation d'un objet, fût-il sensible ou idéal, n'est pas l'objet lui-même :

> « Comme l'Algol lui-même est différent de la représentation que l'on a d'Algol. »[6]

Une représentation est une impression individuelle qui ne peut être qu'interprétée extérieurement, et non saisissable comme une pensée objective peut l'être : une interprétation est sujette à l'erreur. En effet, pour concevoir une représentation objective, il faudrait un étalon tout comme il faudrait une représentation étalon, partageable et objective du rouge de manière à ce que tout être se représentant le rouge puisse comparer sa représentation à la représentation étalon[7]. Or les étalons de rouge existants ne sont qu'abstraits à partir de tous les rouges perçus, et de plus ils n'empêchent pas l'impossibilité de communiquer son impression individuelle du rouge[8].

Un objet est au contraire extérieur et communicable, sinon nous ne pourrions même pas discuter de la vérité de propositions concernant ces objets[9].

---

1 [ÉP], *Logique (1897)*, pages 170 à 172.
2 [FA], paragraphe 27, note 2, pages 155 et 156.
3 [ÉP], *17 propositions sur la logique*, page 207.
4 [ÉLP], *Compte rendu de Philosophie der Arithmetik I*, pages 145 et 146.
5 *Ibid.*, *Recherches logiques*, page 182.
6 *Ibid.*, page 192.
7 *Ibid.*, page 182.
8 [ÉP], *Logique (entre 1879 et 1891)*, page 12.
9 [Gg] I, préface, page xix, feuille 8 ; traduction par A. Benmakhlouf dans *Frege le nécessaire et le superflu*, page 120.

Pour conclure, la psychologie n'a rien à faire en mathématiques, elle est radicalement étrangère à l'idéalité de la pensée et des objets mathématiques.

II.A.2 La nature des mathématiques

Après avoir commencé à élucider la nature des mathématiques et de la logique selon Frege, en ayant éliminé certains points de vue erronés, nous pouvons passer à une détermination de celle-ci. Comme Frege fait régulièrement référence à Kant, à ses catégories d'*a priori*, d'*a posteriori*, d'analytique et de synthétique et à leurs combinaisons, il est utile d'y revenir avant de conclure.

II.A.2.a Rappels de Kant

II.A.2.a.i Les différents jugements

Dans l'introduction de la Critique de la raison pure[1], Kant évoque et explicite ces différentes catégories des jugements.

Selon Kant, un jugement est *a priori* s'il est indépendant des sens et de l'expérience. Un jugement universel est donc *a priori*, comme par exemple un jugement mathématique ou logique.

Au contraire, un jugement qui a besoin d'une confirmation sensible par une expérience est *a posteriori*. Tous les jugements des sciences de la nature sont de cette sorte.

Les jugements étant sous la forme sujet-copule-prédicat, dans les jugements analytiques le sujet est compris dans le prédicat, c'est-à-dire qu'il suffit de décomposer, d'analyser le prédicat pour y trouver le sujet. Par exemple le jugement « tous les corps sont étendus » est analytique car par définition du corps, il est dans sa nature intrinsèque d'avoir une étendue. Kant appelle de tels jugements *explicatifs*[2] car ils n'apportent aucune connaissance supplémentaire : nous ne faisons que ressortir de la boîte ce que nous y avons déjà placé auparavant. Un tel jugement se résume à un jugement d'identité.

Les jugements synthétiques au contraire, nécessitent de sortir du sujet pour lui attribuer le prédicat. Par exemple le jugement « tous les corps sont pesants » nécessite de sortir du concept de corps, de chercher en dehors de lui le fait d'être pesant soit en fin de compte d'être soumis à l'attraction terrestre, pour pouvoir lui attribuer cette propriété ; nous avons donc besoin d'une expérience pour pouvoir conclure. Le prédicat enrichit le sujet d'une connaissance nouvelle qu'il n'avait pas avant d'avoir posé la question de ce jugement. Kant appelle ces jugements *extensifs*[3].

1 E. Kant, *Critique de la raison pure*, pages 64 et suivantes.
2 *Ibid.*, page 71.
3 *Ibid.*

II.A.2.a.ii Kant et les jugements mathématiques

Ces distinctions permettent à Kant de penser la place spécifique et originale des mathématiques, qui sont selon lui le lieu de jugements synthétiques *a priori*. Le problème de la Critique de la raison pure est justement la possibilité de ce type de jugements[1] — ce qui ne veut pas dire que tous les jugements synthétiques *a priori* soient tous mathématiques — et Kant consacre la presque totalité de la cinquième partie[2] de cette introduction à ce problème alors que les sciences de la nature[3] et la métaphysique[4] n'ont droit qu'à un paragraphe chacune, ce qui montre l'importance de ce problème.

Selon Kant, donc, les jugements mathématiques, même les jugements arithmétiques, sont des jugements synthétiques *a priori*. Il conteste l'erreur quasi générale selon lui, de les considérer comme analytiques, parce que les déductions mathématiques procèdent suivant le principe de non contradiction[5]. Or celui-ci ne suffit pas pour caractériser ces jugements, et si les jugements mathématiques ne sont pas empiriques, étant donc *a priori*, ils ont néanmoins une affinité avec l'expérience sensible. Le cas de la géométrie est réglé, elle fait appel à la figure qui nécessite une lecture extérieure et intuitive, ne serait-ce que pour démontrer, par exemple dans le cas de la ligne droite, le prédicat de *droit* nécessite d'ajouter celui-ci au sujet de ligne. Les jugements géométriques sont synthétiques *a priori*.

Dans le cas de l'arithmétique, Kant part de l'égalité 7+5=12[6]. Partant des nombres 5 et 7, il a beau faire et analyser le concept d'une telle somme, il n'y trouvera jamais le nombre 12. Il faut dépasser ces simples concepts pour y trouver 12, en un mot faire appel à l'intuition pour constituer ce nombre 12. Quelle intuition ? Celles de points imaginés, de cinq points et de sept points, ou de doigts, qui constituent une image mentale des unités que l'on compte[7]. Kant ajoute que le fait que les jugements arithmétiques sont synthétiques *a priori* se comprend plus aisément si on pense à des grands nombres.

II.A.2.b Fondation frégéenne du lieu des mathématiques

Au contraire de Kant, Frege pense que les jugements mathématiques, du moins de l'arithmétique et de la logique, sont analytiques *a priori*. Nous en avons vu quelques débuts de justifications précédemment[8], et nous en reverrons lors de la construction du nombre, quand Frege refuse toute présence en celle-ci, toute prétention psychologique sur celles-ci et donc toute présence de l'expérience, fût-elle pure, dans l'arithmétique et dans la logique. Il justifie le fait que sa

1 *Ibid.*, page 78, « [l]e problème propre de la raison pure est donc contenu dans la question : *Comment des jugements synthétiques* a priori *sont-ils possibles ?* ».
2 *Ibid.*, pages 74 à 77.
3 *Ibid.*, page 77.
4 *Ibid.*, pages 77 et 78.
5 *Ibid.*, page 75.
6 *Ibid.*
7 *Ibid.*, page 76.
8 Voir dans ce mémoire page 6.

construction est bien analytique en ce sens que tous ses théorèmes sont bien présents en germe dans ses axiomes et dans ses modes d'inférence, mais « comme une plante l'est dans la graine, mais non pas comme une poutre l'est dans la maison »[1]. Il revient au mathématicien de la développer, de les combiner, de les faire pousser et ainsi d'accroître ses connaissances. Ainsi l'arithmétique, et la logique qui lui sert de fondement, sont pour Frege constructibles entièrement et uniquement à l'aide de principes logiques et évidents, tant les axiomes que les modes d'inférence.

Il faut ajouter que la méthode de Frege se fonde sur la nécessité inhérente à la chose même étudiée[2], à savoir ici la logique. Celle-ci impose donc à Frege, de par sa nature même, des contraintes formelles comme l'usage des lettres ou la présentation bidimensionnelle des propositions de l'idéographie. Elle se fonde aussi sur le refus d'un formalisme creux à la manière de Hilbert dans ses *Fondements de la géométrie*, Frege veut non seulement une écriture idéale de la logique qui servira ensuite en arithmétique et dans d'autres sciences, mais cette écriture idéale doit de surcroît ne pas laisser d'implicite et doit saisir la chose étudiée de manière univoque, c'est-à-dire que Frege veut une méthode qui ne sépare pas la forme de son contenu.

II.B Logique et langage : vers un nouveau langage mathématique

Pour cela, il faut d'abord clarifier les rapports de la pensée et du langage, c'est-à-dire poursuivre le mouvement de descente au nœud du problème : comment fonder une langue mathématique et logique qui peut être opérante à démontrer rigoureusement.

II.B.1 Rapports de la pensée et du langage

II.B.1.a La pensée ne se réduit pas au langage

Il y a une condition à l'existence de la logique selon Frege : la différence de nature entre la pensée et le langage[3]. La pensée est ce qui est commun aux reformulations, aux traductions en d'autres langues d'une proposition, par exemple du langage commun. Nier cette distinction essentielle revient à accepter que les modifications des « vêtements » de la pensée altèrent la pensée elle-même ; en conséquence la logique est « frappée d'interdit »[4].

1 [FA], paragraphe 88, page 212.

2 [Ig], préface, page 8 : « J'espère que les logiciens, s'ils ne se laissent pas rebuter par la première impression d'étrangeté, ne refuseront pas leur approbation aux nouveautés auxquelles j'ai été conduit par une nécessité inhérente à la chose même. »

3 [ÉLP], *Concept et objet*, note 1, page 131.

4 *Ibid.*

Frege distingue ainsi strictement depuis l'article *Sens et dénotation*[1], l'expression, son sens et sa signification[2], et pour paraphraser cet article[3] : une expression (signe écrit) exprime un sens et désigne sa signification (« objet » pointé). Par exemple l'expression « lunes de Mars » exprime la pensée des lunes de Mars et désigne le concept des lunes de Mars, pour lequel deux objets sont subsumés : Phobos et Deimos. Dans le cas d'une expression propositionnelle (une proposition), elle exprime une pensée et désigne une valeur de vérité (le Vrai ou le Faux)[4]. Ainsi l'expression « 2+2=4 » exprime la pensée de 2+2=4 et désigne le Vrai.

Pour Frege[5], la différence de sens d'un langage à l'autre est tout à fait accidentelle et contingente, liée à l'histoire de la langue ou à des manières de voir, ce qu'il appelle « coloration ». La logique ne prend pas en compte cette « coloration », elle n'altère pas la pensée pure, une et communautaire; le sens d'une expression logique est pur, éternel et *a priori*, et il doit se maintenir à travers les différents « vêtements » du langage.

II.B.1.b Théorie et nécessité du signe

Dans l'article *Que la science justifie le recours à une idéographie*[6], Frege développe une théorie du signe, indispensable à toute science, en particulier à la logique et aux mathématiques. Nous venons de voir que la pensée se distingue du langage, elle a néanmoins besoin de signes sensibles pour exister[7]. Sans eux, sans matérialisation durable et stable, la pensée est fuyante et éphémère.

La sensibilité commence bien entendu par les sens externes, mais il est tout aussi clair que ni l'homme ni l'animal ne s'en tiennent là : ils réagissent à ce flot de sensations à leurs représentations pour en modifier le cours. Ainsi ils se déplacent, agissent, communiquent et ainsi que l'homme et certains animaux fabriquent ou utilisent des outils. L'homme ne dispose pas que de la main, il a aussi à sa disposition l'émission de sons par la voix; mais cette dernière reste attachée au flux ininterrompu des sensations. En effet, la voix a certes l'avantage de ne pas dépendre d'un support physique (mettons l'air de côté), de pouvoir transmettre par exemple avec les intonations de la voix, les mouvements du corps et du visage des variations de sentiments fines et subtiles impossibles à transmettre autrement et qui ont toute leur importance dans les arts oraux comme la poésie ou le théâtre. Seulement cet avantage a son revers, il est intimement lié au temps; et sa durée est d'ailleurs indéfinie du fait de la présence antérieure, simultanée ou postérieure de ces signes non-verbaux. La répétition à l'identique est impossible, l'examen multiple aussi; malgré les

1 *Ibid.*, *Sens et dénotation*, pages 103 et suivantes.
2 Nous utiliserons plutôt signification ou objet pointé pour traduire *Bedeutung* que dénotation, cette dernière traduction indique plutôt un anglicisme, langue pour laquelle *denotation* est en revanche bien choisi. Voir le glossaire en annexe.
3 [ÉLP], *Sens et dénotation*, page 107.
4 *Ibid.*, page 108 et suivantes.
5 *Ibid.*, *Concept et objet*, note 1, page 131.
6 *Ibid.*, *Que la science justifie le recours à une idéographie*, pages 63 et suivantes.
7 *Ibid.*, page 63.

possibilités modernes de duplication du son ou de l'image, il reste toujours la part du choix du preneur de son, du cadreur de l'image puis du monteur de l'ensemble qui rendent cette restitution parfaite impossible du fait de ces choix. Et toutes manières, même en écoutant répéter plusieurs fois la même personne ou le même enregistrement, à chaque écoute nous restons prisonniers de l'écoulement temporel immédiat et de l'empirique.

Ainsi, la découverte du signe a été une véritable libération. Il est une trace, une présence sensible du non sensible, qui indique la présence de ce qui est inaccessible aux sens : la pensée. Au contraire de la perception immédiate et donc de la voix, le signe écrit fixe une représentation dans la durée. Ce qui est remarquable dans le signe écrit, c'est qu'il part du sensible pour s'en libérer, tout comme quand en navigation les hommes ont eu « l'idée d'utiliser le vent afin d'aller contre le vent. »[1] Certes, chaque outil utilise la puissance naturelle contre elle-même, mais le signe a cette originalité radicale, non seulement de rompre les amarres vis-à-vis du monde extérieur, mais en l'utilisant de surcroît comme support.

L'intérêt du signe repose ainsi dans sa permanence, son univocité possible, son indépendance à l'empirique, sa détermination spatiale précise, sa liberté de création et de relecture, son unicité et sa capacité à rassembler en un terme commun ce qui est différent dans sa particularité, un en mot à exprimer un concept. Comme l'écrit Frege, le signe écrit permet de « parcourir plusieurs fois du regard une suite de pensées sans crainte qu'elle soit altérée et vérifiée d'autant plus soigneusement sa valeur concluante. »[2]

Cela dit, il ne faut pas conclure hâtivement à l'adéquation *a priori* du signe à la pensée. En effet, le signe écrit comme par exemple dans la langue commune écrite, et nous le verrons dans la partie suivante, masque ou accentue les fautes de la pensée et empêche la réalisation d'une science rigoureuse. Le signe écrit est donc nécessaire mais non suffisant à l'édification d'une science logique et à l'accord des esprits. Il faut de plus que les signes utilisés dans ce projet soient univoques, immédiatement compréhensibles, qu'il expriment les choses signifiées immédiatement aussi et qu'ils soient libérés de l'unidimensionnalité.

Par exemple, très tôt dans la présentation de son idéographie des *Lois fondamentales*[3], Frege explique son usage des signes, ce que les différents caractères, polices et casses indiquent.

- Les lettres latines en minuscules (a, b, c) indiquent des objets logiques ;

1 *Ibid.*, page 64.

2 *Ibid.*, page 65. Voir aussi page 67 : « L'écriture offre la possibilité de retenir présents plusieurs éléments simultanément, et même si l'œil ne peut saisir à chaque regard qu'une petite partie du contexte, nous en gardons une impression générale qui demeure à notre disposition immédiate, selon nos besoins. La position relative des signes écrits, distribuée dans le plan d'écriture bidimensionnel, peut servir à exprimer des rapports internes, de manière plus déliée que ne le permettent les simples précession et succession du temps unidimensionnel ; et la recherche de ce sur quoi nous voulons fixer l'attention s'en trouve facilitée. »

3 [Gg] I, dès le paragraphe 1, page 6, feuille 37, où il explique l'usage de ξ dans les fonctions.

- Les lettres grecques en minuscules (α, ε, η) indiquent des objets logiques liés à un parcours de valeurs, $\mathring{\alpha}(\alpha+2)$ exprime le parcours de valeurs[1] de la fonction ajouter 2 ;
- Les lettres grecques en capitales (A, B, Γ) indiquent des propositions ;
- Les lettres gothiques (𝔞, 𝔟, 𝔠) indiquent des objets (et des fonctions dans l'*Idéographie*) liés au quantificateur universel, —𝔞— 𝔞+𝔞=2𝔞 exprime ∀a a+a=2a ;
- Les lettres grecques ξ et ζ indiquent une place libre dans une fonction, ξ×2 exprime la fonction de multiplication par 2.

Frege présente aussi d'autres signes comme celui d'assertion, de jugement ou de négation. Nous les verrons ci-après.

II.B.1.c Insuffisance du langage commun

Le langage commun selon Frege[2] ne satisfait pas au conditions de découverte et de justification de la vérité, car il est en constante mutation, adaptation, instabilité. C'est d'ailleurs une nécessité : le langage évolue car il est un outil de communication sociale, et cette évolution épouse les transformations sociales. Cette origine pratique le frappe du sceau de l'équivocité et de l'implicite.

Prenons l'exemple du terme cheval fourni par Frege[3] :

Il peut désigner un individu comme dans l'expression « Le cheval a faim » (1), sous-entendu[4] le seul que nous avons dans l'écurie, et qui s'appelle Bucéphale.

Il peut désigner un concept, comme dans l'expression « Bucéphale est un cheval. » (2).

Il peut désigner enfin une espèce, comme dans l'expression « Le cheval est un mammifère. » (3)[5].

Et nous ne mentionnons même pas les autres sens, argotiques ou non, du terme cheval.

Pour ce qui concerne l'implicite, Frege prend l'exemple[6] de la proposition 19 du livre I des *Éléments* d'Euclide[7] où Euclide utilise trois propositions non explicitées dans sa preuve, propositions pourtant qu'on aurait pu s'attendre à lire dans les notions communes vu leur évidence et leur style :

1. Quand un segment n'est pas plus grand qu'un autre alors il lui est égal ou inférieur.
2. Quand un angle est égal à un autre angle, il ne lui est pas supérieur.
3. Quand un angle est plus petit qu'un autre angle, il ne lui est pas supérieur.

---

1 Voir dans ce mémoire page 21 pour une proposition d'explication plus complète de ce qu'est un parcours de valeurs.

2 [ÉLP], *Que la science justifie le recours à une idéographie*, pages 66 et 67.

3 *Ibid.*, page 64.

4 D'ailleurs nous avons ici rappelé que le langage commun use et abuse de sous-entendus, donc d'équivocité, par exemple une telle phrase peut être difficile à interpréter pour quelqu'un qui ne sait pas si son hôte a un cheval dans son écurie ou s'il parle de celui du voisin.

5 Nous reverrons ces trois propositions dans ce mémoire page 17.

6 *Ibid.*, page 65.

7 Les *Éléments* d'Euclide, page 16, énoncée ainsi : « Dans tout triangle, un plus grand côté soutend un plus grand angle. »

Ainsi l'usage de la langue commune en mathématiques, même chez Euclide pourtant réputé pour sa rigueur, n'empêche pas que des propositions implicites apparaissent au cours d'une démonstration, bien au contraire. Pourquoi Euclide n'a-t-il que neuf notions communes[1] alors que visiblement il aurait pu en écrire bien d'autres dans le même style ? Serait-ce parce que leur évidence était telle qu'elle n'avait pas besoin d'être explicitée, au contraire des neuf autres ? L'exemple de la proposition 1 du livre I est aussi édifiant[2]. Mais le cas est plus grave que l'apparition de propositions implicites au cours d'une preuve, le cœur même de la preuve mathématique est aussi entaché d'équivocité.

Étudions le cas de la déduction et de l'implication (donc, par conséquent, à cause, etc.) Celle-ci peut très bien relier une cause et un effet, de plus pas toujours nécessairement liés. La nécessité ici est causale et non logique, en ce sens que l'implication A→B vraie ne signifie rien d'autre A→B vraie, c'est-à-dire que le cas où A est vraie et B est fausse, est nié, et ce que les propositions A et B soient des propositions mathématiques ou non. Il n'y a pas de causalité en logique en ce sens que soudainement une proposition ne peut pas devenir vraie parce qu'une autre le devient. Les propositions logiques sont vraies, éternellement vraies.

La causalité peut aussi être affaiblie, par exemple par la présence d'exceptions ou de contingence, pensons aux éclosions et pousses parfois aléatoires de plantes de potager, même si la saison était clémente.

La causalité commune peut aussi être une corrélation statistique sans causalité, mais qui peut cacher une réelle causalité commune. Pensons par exemple à une étude de la population de cigognes en Alsace, qui se trouvent être plus nombreuses dans les villages où il y a le plus de naissances. En fait cela pourrait s'expliquer par le nombre d'habitants qui, plus il est faible impliquerait une plus forte natalité, et la petite taille du village impliquerait une plus faible pollution atmosphérique.

Elle peut être aussi une simple coïncidence, interprétée comme une causalité, par exemple par un paranoïaque qui voit dans le regard mal réveillé d'un passant une tentative de pénétration mentale.

Elle peut aussi être une nécessité juridique, résultat d'une convention sociale : si je commets tel délit alors je suis passible de telle peine. Encore faut-il être pris, jugé.

Ainsi pour un même mot ou un même concept le langage commun indique plusieurs catégories radicalement différentes, ce qui doit être strictement interdit dans une idéographie où chaque objet ou concept est strictement délimité.

1 En fait il y en a moins selon la traduction des *Éléments* de Vitrac, mais nous utilisons ici celle de Peyrard.

2 Voir dans ce mémoire page 4.

II.B.2 Nécessité d'une idéographie

II.B.2.a Insuffisance des notations mathématiques et logiques habituelles

Il est donc nécessaire de se doter d'une notation spécifique dédiée au travail scientifique. Il en existe déjà : les notations algébriques, analytiques ou logiques diverses ont permis un progrès des connaissances scientifiques.

Frege par exemple attaque la notations f(x), utilisée de manière peu claire selon lui par les mathématiciens de son époque[1]. Celle-ci peut désigner selon eux, l'image par f de x, mais aussi la fonction f elle-même. Cela commence à poser un problème quand on veut parler de la fonction $2\times x^3+x$, fonction de x, mais alors si on remplace x par 2, $2\times 2^3+2$ devient une fonction de 2^2. De la même manière, lors de la dérivation[3] de $\cos(\frac{x}{2})$, on obtient $\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx}=\frac{-\sin(\frac{x}{2})}{2}$, mais si on dérive en x=2, on devrait obtenir $\frac{d\cos\frac{2}{2}}{d2}$. Aucun des cas n'est acceptable. Le problème est que la distinction entre les différents rôles de la lettre x n'est pas lisible directement dans la formule ; il faut l'interpréter pour pouvoir la comprendre correctement ce qui pose problème non seulement aux étudiants et aux élèves, mais aussi peut créer de fausses représentations chez les bons mathématiciens.

De la même manière, Frege conteste les notations de Boole[4], par exemple a+b=1, qui signifie en langage moderne a⊻b=1 (c'est un « ou exclusif », chez Boole la somme logique est exclusive, il ne conçoit pas une somme logique d'extension de concepts ou de contenu de jugements ayant des éléments communs). Mais nous ne savons pas ici :

- Si c'est une identité, toujours vraie ;
- Si c'est une équation pour laquelle nous cherchons a en fonction de b, b en fonction de a ou a et b ;
- S'il s'agit d'une égalité exprimée comme exemple et qui pourrait être fausse ;
- S'il s'agit d'une égalité vraie (une propriété) pour tel a et tel b particuliers.

Encore une fois le contexte est nécessaire pour interpréter correctement la formule.

Même les notations mathématiques et logiques sont fautives, il est donc nécessaire de créer un langage rigoureux et spécifique pour remédier à ces erreurs.

---

1 [ÉLP], *Fonction et concept*, page 81 et 84, mais aussi tout l'article *Qu'est-ce qu'une fonction ?*, pages 160 à 169.

2 *Ibid.*, *Fonction et concept*, page 81.

3 *Ibid.*, *Qu'est-ce qu'une fonction*, pages 167.

4 *Ibid.*, *Sur le but de l'Idéographie*, page 77, voir aussi les pages 72 et 73 à propos de A.B=0.

II.B.2.b Création d'une nouvelle idéographie

Une des clés de l'idéographie proposée par Frege est l'invariance, l'univocité des notations. Ainsi comme nous l'avons vu précédemment[1], ξ désignera toujours une place libre dans une fonction. Pour revenir sur la métaphore de l'outil et de la main[2], autant la main comme le langage commun ont un usage universel, souple mais multivoque, autant l'outil comme l'idéographie ont un usage restreint, rigide mais univoque.

Dans le cas de la fonction, Frege réserve deux lettres grecques à cet usage : ξ et ζ, celles-ci indiquent une place libre dans une fonction, le doublement de l'une d'elles indique que le remplacement doit être fait à chaque apparition. ainsi la fonction mal écrite en $2\times x^3+x$ doit être écrite de la manière suivante : $2\times\xi^3+\xi$. Si on veut calculer sa valeur en 3, on doit remplacer les deux ξ par 3, ce qui donne $2\times3^3+3$, si on veut sa valeur en x, on obtient $2\times x^3+x$.

Dans le cas de l'implication et de la déduction, il sépare nettement les deux. L'implication est appelée conditionnalité et est notée $\begin{array}{l}\text{———}\\ \text{└——}\end{array}$ $\begin{array}{l}A\\ B\end{array}$. Elle que parmi les quatre possibilités (A est vraie et B est vraie ; A est vraie et B est fausse ; A est fausse et B est vraie ; A est fausse et B est fausse), la troisième est niée ou en écriture moderne que $\neg(B \wedge \neg A)$. Cela signifie que, contrairement à l'implication du langage commun, que $\begin{array}{l}\text{———}\\ \text{└——}\end{array}$ $\begin{array}{l}2=2\\ 2=2\end{array}$ puisque seul le premier cas se présente. Quant à la déduction, Frege n'utilise qu'une règle dans l'*Idéographie*[3], le *modus ponens* (la substitution est explicitée à part). Dans les *Lois fondamentales*, il en utilise cinq : le *modus ponens*[4], la transitivité de l'implication[5], la contraposition généralisée[6] (si $A\rightarrow B$ alors il en déduit $\neg B\rightarrow\neg A$), l'indépendance d'une proposition déduite de deux propositions contradictoires[7] et un passage au général à partir d'un cas arbitraire[8] (si P(a) avec a arbitraire, alors $\forall a\ P(a)$). Nous les reverrons dans ce mémoire page 41.

Dans le cas de l'écriture a+b=1 :

- Si c'est une identité, on écrit —𝔞,—𝔟,— 𝔞+𝔟=1, noter la police gothique spécifique à cet usage et qui indique deux objets indéterminés liés à un quantificateur universel ;
- S'il s'agit d'une équation où b est donné et a cherché, Frege exprime l'extension du concept ξ+b=1 comme suit : $\grave{a}(a+b=1)$;
- S'il s'agit d'une égalité exprimée, mais sans savoir si l'écriture signifie quelque chose, il écrit a+b=1 ;
- S'il s'agit d'une égalité exprimée sans savoir si elle est vraie, il écrit — a+b=1[9] ;

1 Dans ce mémoire, page 12.
2 [ÉLP], *Que la science justifie le recours à une idéographie*, page 66.
3 [Ig], paragraphe 6, page 21, développé dans les pages suivantes.
4 [Gg] I, paragraphe 14, pages 25 et 26, feuilles 56 et 57.
5 *Ibid.*, paragraphe 15, pages 26 et 27, feuilles 57 et 58.
6 *Ibid.*, pages 27 à 29, feuilles 58 à 60.
7 *Ibid.*, paragraphe 16, page 30, feuille 61.
8 *Ibid.*, paragraphe 17, pages 31 à 33, feuilles 62 à 64.

- Si l'égalité est vraie, il écrit $\vdash$ a+b=1, la même chose que le cas précédent plus le trait vertical dit de jugement.

Dans le cas du cheval[1], Frege proposerait trois écritures distinctes et clairement différentiables de ces trois expressions. Notons B Bucéphale, F(ξ) le concept avoir faim, C(ξ) le concept être un cheval et M(ξ) le concept être un mammifère.

(1) s'écrit F(B), Bucéphale tombe sous le concept avoir faim.
(2) s'écrit C(B), Bucéphale tombe sous le concept être un cheval.
(3) s'écrit $\begin{array}{l} \cdot^{a}\cdot \\ \quad \vdash M(a) \\ \quad\ \ C(a) \end{array}$ ou en écriture moderne ∀a C(a)→M(a), soit pour tout a, a tombe sous le concept de cheval implique a tombe sous celui de mammifère.

Ainsi, par ces exemples Frege montre qu'il propose une idéographie, une écriture des concepts et des objets qui est claire, rigide, utilisable, féconde et univoque.

Nous allons en conséquence tester cette méthode en étudiant la construction du nombre entier puis les questions qu'elle soulève.

9 Noter que dans [Ig], paragraphe 2, note 2 de la page 16, Frege impose que a+b=1 ait un contenu, c'est-à-dire que a et b soient bien des nombres et pas autre chose ; alors que dans [Gg] I, paragraphe 5, pages 9 et 10, feuilles 40 et 41, il n'impose plus rien de tel et se contente de dire que — Soleil+b=1 signifie le Faux, puisque Soleil n'est pas un nombre et que l'expression Soleil+b n'est pas correcte. Voir ici pages 22 et 45.

1 Voir page 13 de ce mémoire.

III Mises à l'épreuve de la philosophie de l'arithmétique de Frege par la construction du nombre et par l'idéographie

Nous allons maintenant prendre en exemple la théorie du nombre, telle qu'elle est présentée dans les *Fondements de l'arithmétique* et mise en acte dans les *Lois fondamentales de l'arithmétique*.

Nous allons ensuite choisir trois mises à l'épreuve, par ordre de gravité : le rôle des substitutions, les justifications des principes premiers (ou axiomes) et des modes d'inférence, et enfin les valeurs possibles des indéterminées.

III.A La théorie du nombre entier en exemple

Étudions l'exemple de la construction du nombre, mais d'abord comment Frege présente dans les *Fondements de l'arithmétique* sa théorie contre d'autres théories. Ceci nous amènera à un tri des théories précédentes ou contemporaines de Frege pour en retirer les fondements. Une fois ceci fait, nous pourrons étudier dans le détail la construction effective des *Lois fondamentales*. Au fur et à mesure de ces études, nous verrons poindre quelques critiques, développées à la suite et séparément.

Dans la suite nous assimilerons nombre à nombre entier naturel pour ne pas alourdir le propos.

III.A.1 Clarification de la théorie du nombre

III.A.1.a Réfutation de fausses théories sur le nombre

Dans le paragraphe 45 des *Fondements*[1], Frege récapitule les conceptions erronées du nombre.

Il n'est pas abstrait des choses comme le sont le poids, la couleur ou la dureté. Par exemple on n'obtient un étalon de couleur que par abstraction, en comparant les contenus sensibles particuliers pour en extraire une ressemblance, un contenu général : comme Frege l'écrit dans le *Compte rendu de Philosophie der Arithmetik I*[2], où il étudie la formation du concept de chat, par oublis successifs de caractéristiques particulières de deux chats présents devant lui, comme leur couleur, leur posture, on aboutit au concept de chat, qui devient un « spectre de plus en plus exsangue »[3] ; le chat abstrait n'a ni couleur ni posture ni position.

La méthode utilisée ici est l'induction, le procédé qui à partir de cas particuliers permet de trouver une ressemblance puis de conclure à une propriété générale ; procédé qui amène un jugement synthétique selon la

1 [FA], paragraphe 45, pages 174 et 175.
2 [ÉLP], *Compte rendu de Philosophie der Arithmetik I*, page 145.
3 *Ibid.*

classification kantienne. Or on ne peut pas déduire une couleur *a priori*, et comme l'analytique *a posteriori* est exclu comme le rappelle Frege[1], un jugement sur la couleur est donc synthétique. En effet, si un jugement est analytique, le prédicat est déjà contenu dans le sujet, et donc il n'y a pas besoin d'une expérience scientifique, qui fait sortir du sujet, pour conclure. On doit donc sortir du concept général de chat pour attribuer à un chat particulier une couleur. Il n'est pas dans la nature du chat d'être de telle ou telle couleur intrinsèquement. Mais au contraire de Kant, Frege considère que les jugements arithmétiques sont analytiques, donc que le nombre ne peut pas se construire ou se déduire par induction. Ainsi Frege prend le contre pied de Kant à propos des grands nombres, et explique qu'il lui semble bien difficile d'acquérir une intuition du nombre 37863 à partir de l'intuition de 37863 doigts[2].

Ensuite Frege dit que le nombre n'est ni un être physique ni une représentation subjective, ce que confirme le paragraphe précédent. Le nombre n'est ni en moi (subjectif) ni hors de moi (objet matériel). Il n'est pas subjectif car sinon il en existerait plusieurs différents, selon l'individu qui se le représente. Il serait impossible de faire de l'arithmétique, d'écrire que 2+2=4 puisque d'une part rien ne nous dit que le premier 2 écrit est le même 2 que l'autre, puis que chaque 2 est le même pour chaque lecteur de l'égalité. Il n'est pas non plus un objet matériel car sinon le premier 2 de l'égalité précédente serait matériellement différent de l'autre, ce qui détruit la notion de nombre 2, donc de nombre en général ; cette remarque est étendue ci-après.

Le nombre ne naît pas non plus par addition de choses, fussent-ils d'autres nombres. Si on a plusieurs collections équinumériques, elles ne sont pas chacune le même nombre, puisqu'il y aurait un nombre à la fois identique conceptuellement et différent matériellement : la pluralité a détruit l'unité. Par additions de nombres on n'obtient rien d'autre qu'une définition créatrice de l'objet défini. Celui-ci est défini et créé magiquement, sans que la légitimité de celle-ci ait été justifiée. Définir 4 comme 2+2 n'a jamais démontré que 4 existait en tant que nombre 4. Certes on peut créer artificiellement 2+2 et choisir une abréviation comme le fait Frege avec sa notation ╟─, mais rien ne dit a priori, comme on doit de faire pour une définition selon lui, qu'il s'agit bien là du nombre 4 lui-même et pas d'un autre objet, mathématique ou pas. Une telle définition n'interdit pas de définir Jules César=2+2[3].

Enfin, le nombre n'est pas non plus une collection, une réunion d'identiques puisque sinon ces identiques, pourtant différents, se fondent dans un nouveau nombre et deviennent indiscernables. L'unité a détruit la pluralité, à l'inverse du paragraphe précédent. Si on veut sauver la pluralité en différenciant les « un » en leur adjoignant à chacun un indice différent, on perd la possibilité de les additionner puisque ce ne sont plus les mêmes « un », et l'arithmétique est détruite. Pour résumer : si on construit le nombre par addition, il est impossible

1 [FA], paragraphe 12, page 139.
2 *Ibid.*, paragraphe 5, page 130.
3 Dans le même esprit, Frege pose la question de savoir si Jules César est un nombre dans [FA], paragraphe 56, page 183.

de conserver conjointement la pluralité des nombres différents et l'unicité de chaque nombre individuel.

Pour Frege la source de ces erreurs est la confusion entre l'un et l'unité.

III.A.1.b Confusion entre l'unité et l'un

D'après Frege[1] une unité est indécomposable, se réplique et se met au pluriel alors que un est un nom d'objet analysable, qui ne se réplique pas et ne se met pas au pluriel[2]. Une unité est une chose que l'on compte, la différence entre ces choses n'est pas abolie comme par exemple quand on compte des tables. L'unité est la table mais chaque table individuelle, comptée reste différente de sa voisine.

Quand on passe de la réunion à l'addition, il est tentant de confondre sans autre forme de procès l'unité et le nom propre du nombre un. L'unité utilisée en physique mais aussi souvent de manière implicite en mathématiques, est utilisée comme une fonction. On écrit 1 cm de la même manière que si on avait la fonction « ξ cm », le ξ désigne une place libre pour un nombre, cm est l'unité elle-même qui n'est pas décomposable. À l'époque de Frege le centimètre est défini par convention à partir d'un étalon unique, posé et non analysable : le mètre-étalon était donné et physiquement duplicable. Elle est maintenant analysable, et se base sur celle de l'unité de temps qui elle dépend de la période de la radiation d'un atome. De toutes les manières une unité est utilisée comme indécomposable, à la manière de leur usage en mathématiques (« Posons AB l'unité de longueur ») ou naïvement quand on compte des objets matériels comme des tables ou immatériels comme des droites. Écrire 1 cm=10 mm n'est pas décomposer ou analyser le cm mais seulement, comme le signale Frege, dire la même chose de deux manières différentes, avec deux fonctions différentes, comme quand on écrit $3^2=3+6$ où les fonctions sont « ξ^2 » et « $3+\xi$ ».

L'unité est ce qui est identique entre des objets différents mais cela ne donne pas pour autant le nombre un ni aucun autre nombre. Le nombre n'est donc pas une subsomption abstractive, ce qui est commun entre des objets n'est pas un objet mais un concept, donc pas un nombre : il faut se rappeler de la distinction frégéenne fondamentale entre concept (ou plus généralement fonction) et objet[3]. Ainsi les expressions de multiplicité, d'ensemble ou de pluralité ne permettent pas d'élucider ou de construire le nombre du fait de leur indétermination. Le multiple caractérise un agrégat sans nécessairement faire appel au nombre, comme par exemple dans un tas de sable. L'ensemble caractérise plusieurs objets délimités précisément, mais « 3 droites » ne forme pas un nombre, voir l'analyse de l'unité ci-après. La pluralité caractérise une collection d'objets similaires, on a vu ce qu'il en était précédemment.

L'addition n'est pas mal déterminée comme ces trois précédentes expressions, elle est une fonction « $\xi+\zeta$ » qui, quand on remplace ξ et ζ par des nombres,

1 *Ibid.*, paragraphe 54, page 182, ainsi que paragraphe 45, page 175.

2 [Gg] I, paragraphe 42, page 58, feuille 89. En effet, il n'y a qu'un nombre un comme il n'y a qu'un nombre zéro ; cette unicité du nombre zéro servira d'ailleurs à construire le nombre un.

3 [ÉLP], *Fonction et concept*, pages 127 et suivantes.

dénote un autre nombre ; ce qui est très précis si on a pris la précaution de dire lequel. Ceci n'est matériellement pas possible en acte pour tous les entiers mais on peut potentiellement le faire si on a des règles de calcul de proche en proche, à la manière des machines à calculer ou quand on pose une opération. Notons qu'on pourrait aussi comprendre l'addition comme le concept « ξ+ζ=η » qui dénote le Vrai ou le Faux selon les valeurs remplaçant les trois lettres grecques. Cette définition a l'inconvénient de ne pas être aussi utilisable que la précédente.

III.A.2 Ce qu'est le nombre, et comment il se construit

III.A.2.a L'essence du nombre

Ainsi dans le jeu de l'unité et du nombre se dessine la nature de ce dernier. Quand on parle de 4 compagnies ou de 500 hommes (on retrouve les unités compagnie et homme), ni chaque compagnie ni chaque homme ne change, ce qui change est la dénomination que je donne de ce qui est visé, c'est-à-dire la substitution d'une fonction à une autre. L'essence du nombre est dans un jugement arithmétique comme le rappelle Frege :

« [...] donner un nombre c'est énoncer quelque chose d'un concept. »[1]

Il considère que c'est dans le cas du nombre zéro que la chose se voit le plus clairement. Donc quand je dis « Vénus à zéro lune. » n'existe aucune lune ou agrégat de lune dont on peut énoncer quelque chose. Au concept « lune de Vénus » est attribué une propriété, celle de ne rien subsumer ; ou plutôt que pour tout objet A remplaçant le ξ du concept « ξ est une lune de Vénus », « A est une lune de Vénus » dénote le Faux. Ainsi « [A]ffirmer l'existence, ce n'est rien autre que nier le nombre zéro. »[2], au quantificateur sur A près.

Mais comment donner le nombre zéro sans référence par exemple à la planète Vénus, qui est susceptible de destruction ou d'acquérir une lune ? Il suffit pour cela de faire appel à des notions, concepts ou objets intemporels selon Frege, comme ceux utilisés par les logiciens et les mathématiciens. Quel concept ne subsume aucun objet ? Par exemple celui qui affirme que A est non-A, ou en écriture idéographique « ┬ξ=ξ »[3]. Maintenant il faut construire le nombre qui lui est associé, le nombre 0, noté 𝔇 dans l'idéographie[4] et il faut donc préciser la nature du nombre et pour cela pouvoir parler de nombre d'un concept, qui est un objet défini à partir de lui. Plus précisément : 𝔇 est le nombre, non pas du concept « ┬ξ=ξ » mais de son parcours de valeur noté ἐ(┬ε=ε). Le parcours de valeur n'est pas défini par Frege, étant un objet premier il n'est qu'explicité. On peut le comprendre d'une manière moderne comme le graphe de la fonction « ┬ξ=ξ », chaque valeur prise en entrée est reliée à la valeur renvoyée par la fonction, à la manière du graphe fléché ci-après :

1 [FA], paragraphe 46, page 175.
2 *Ibid.*, paragraphe 53, page 180.
3 [Gg] I, paragraphe 41, pages 57 et 58, feuilles 88 et 89.
4 *Ibid.*, page 58, feuille 89. Nous respecterons généralement les notations frégéennes dans la suite quand nous utiliserons des notations idéographiques (par exemple 𝔇 au lieu de 0).

Graphe de la fonction carré

−0,1	→	0,01
0	→	0
0,5	→	0,25
1	→	1
1,2	→	1,44
i	→	−1
Soleil	→	?
etc.		

Par exemple la fonction « $\vdash\xi=\xi$ » renvoie systématiquement la valeur le Faux, quelle que soit la valeur donnée en entrée, le parcours de valeurs d'un concept est appelée extension de ce concept. Notons que Frege préfère travailler avec des objets mathématiques, d'où son usage systématique des objets représentants des fonctions : les parcours de valeurs. Les objets, contrairement aux fonctions, peuvent être égaux donc substituables.

Pour définir le nombre d'un objet associé à un concept, Frege a besoin de l'équinuméricité, c'est-à-dire qu'un concept a le même nombre d'objets subsumés qu'un autre ; ce qui se caractérise sans faire appel au nombre — sinon les définitions seraient un cercle vicieux — en mettant en relation un à un les objets subsumés de l'un et ceux de l'autre, à la manière des maris et femmes mariés (sans compter les décès) ou les fourchettes et couteaux d'une table mise. C'est bien de l'équipotence moderne qu'il s'agit, mais cette dernière n'est pas écrite idéographiquement. La définition du nombre de Frege met en bijection deux ensembles (en langage moderne), extensions de concepts, plus précisément les objets subsumés par ces deux concepts ; d'où une certaine ambiguïté sur ce qu'est exactement le parcours de valeurs, très général et pour lequel n'importe quelle valeur en entrée est acceptée, et l'extension de concept, qui en est un cas particulier mais qui est facilement interprétable comme l'ensemble des objets tombant sous le concept en question.

Voyons la construction de plus près.

III.A.2.b Construction frégéenne du nombre

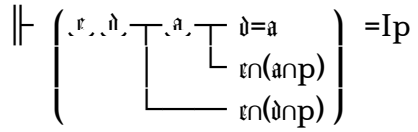
Son cœur est compris du paragraphe 37 et au paragraphe 42 des *Lois fondamentales* et se poursuit jusqu'au paragraphe 46.

III.A.2.b.i Relation de plusieurs à 1

Frege commence par définir le concept de relation de plusieurs à un pour un parcours de valeurs représentant une relation[1], il prend pour exemple la relation être le carré de, ou « $\xi^2=\zeta$ », « ζ est le carré de ξ » pour laquelle chaque nombre

1 [Gg] I, paragraphe 37, pages 55 et 56, feuilles 86 et 87. Mais aussi [Ig], paragraphe 31, pages 101 et 102 où la notation diffère légèrement : par exemple $\mathfrak{x}\cap(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p})$ (spécifique aux *Lois fondamentales*) est noté $f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})$.

remplaçant ξ est en relation avec un seul nombre remplaçant ζ. Autrement dit si $a^2=b$ et si $a^2=c$ alors b=c, ou en langage moderne si nous la notons R, si aRb et si aRc alors b=c, ce que Frege écrit comme suit, l'abréviation est notée Ip :



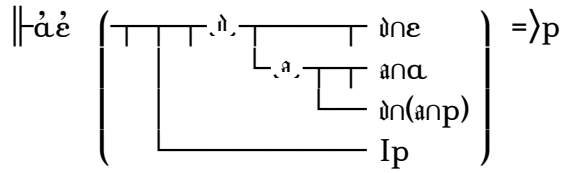
a∩p est l'image de a par une fonction f dont le parcours de valeurs est p soit f(a), de même a∩(b∩p) est f(a,b) dans le cas d'un parcours de valeurs double, les gothiques caractérisent les lettres dépendantes d'un quantificateur. On traduit donc en gardant les notations précédentes :

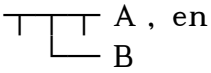
Ip est l'abréviation de ∀e∀d (f(e,d) → ∀a (f(e,a) → d=a))

En d'autres termes au lieu de f(a,b) on peut écrire g(a)=b, la relation peut être considérée comme une fonction au sens moderne du terme ; ou quand Frege écrit Ip et a∩b∩p on peut comprendre que le parcours de valeurs p fait pointer a vers b, et uniquement b.

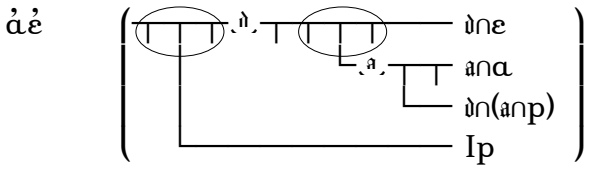
III.A.2.b.ii Vers l'équipotence

Pour obtenir l'équipotence il va falloir faire pointer les objets tombant sous les concepts représentés par deux parcours de valeurs, un à un. Frege commence par faire pointer tous les objets d'un parcours de valeur simple a vers les objets d'un autre e. Il définit ⟩p, qui est un parcours de valeurs double. Les objets mis en relation sont donc eux-mêmes des parcours de valeurs simple[1] (j'ai entouré quelques parties pour plus de lisibilité) :

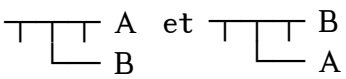


Modifions cette formule pour faire apparaître des conjonctions 

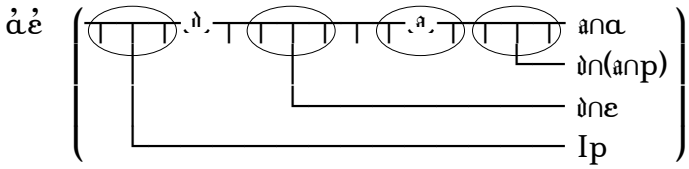
, en effet cette notation revient à écrire ¬(B → ¬A), soit ¬¬ (B ∧ ¬¬A), soit B∧A :



1 [Gg] I, paragraphe 38, page 56, feuille 87.

Or 

peuvent se traduire par la même expression, donc on peut écrire, et en doublant la négation avant et après 𝔞 :



Ce qui se traduit par (le troisième bloc entouré correspond à ∃𝔞, les autres à ∧) :

Si les extensions p, a et e des concepts respectifs u, f et g sont tels que :
u est univoque ∧ ∀𝔟 ¬ g(𝔟) ∧ ¬ [∃𝔞 u(𝔟,𝔞) ∧ f(𝔞)],
alors renvoyer le Vrai, sinon renvoyer le Faux.

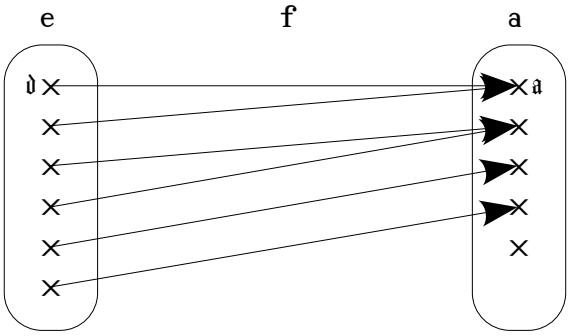
Si pour simplifier l'analyse de cette formule on assimile une extension de concept aux objets tombant sous ce concept, on peut écrire que :

f est univoque et pour tout 𝔟, il est faux que 𝔟 vérifie g et qu'il n'existe pas de 𝔞 vérifiant f et en relation u avec 𝔟.

Donc pour tout 𝔟 il existe un 𝔞, et un seul puisque u est univoque, soit :

Pour tout 𝔟 vérifiant g il existe un seul 𝔞 vérifiant f et dans la relation u avec 𝔟.

Représentons ceci par un diagramme en patates :



On voit que f n'est ni injective ni surjective, elle ne garantit donc aucune inégalité entre les cardinaux de e et de a, mais elle garantit que card f(e)≤card e.

III.A.2.b.iii Définition du nombre d'un parcours de valeurs

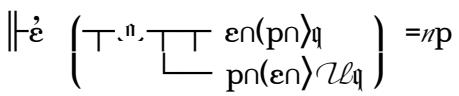
Frege a maintenant besoin de définir la converse d'une relation[1] :

𝔞𝔢 (α∩(ε∩p)) =$\mathcal{U}\ell$p

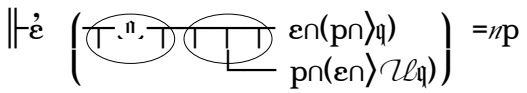
En clair on échange α et ε.

1 *Ibid.*, paragraphe 39, page 57, feuille 88.

Et enfin, il définit le nombre du parcours de valeurs p de la manière suivante[1] :

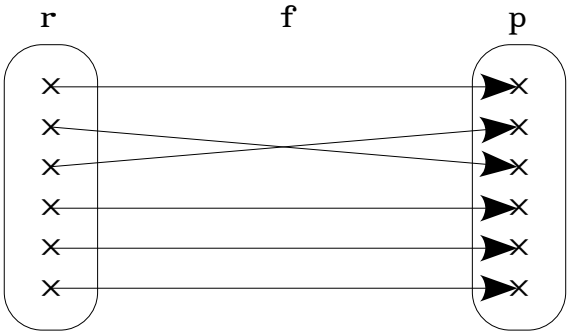


On peut écrire une double négation après ⌐ pour faire apparaître la structure :



Comme ηp est aussi un parcours de valeurs simple, on peut donc écrire r∩ηp ; étudions ce que cela veut dire :

Il existe un q (qui est le parcours de valeurs d'une relation f entre les deux parcours de valeurs r et p[2]) telle que f met dans la relation ⟩ r et p, et que la converse de f met dans la même relation p et r. En d'autres termes la relation f relie chaque « élément » de r avec un seul « élément » de p, et la converse chaque « élément » de p avec un seul « élément » de r.



Comme f est univoque et sa converse aussi, chaque élément de p n'est image que d'un seul élément de r ; donc card r=card f(r)≤card p. De même pour chaque élément de r donc card p=card f^{-1}(p)≤card r. Conclusion : card p=card r.

Cela veut dire deux choses :

1. En assimilant l'extension de concept et l'ensemble des objets tombant sous ce concept, ηu est l'ensemble des q de même cardinal que u ;
2. Comme nous venons de le voir, cette notation peut servir à noter deux ensembles de même cardinal.

Ainsi « ⊤⌐⊤ηι=ξ » désigne le concept de nombre, et ἐ(⊤⌐⊤ηι=ε) l'ensemble des nombres, plus précisément l'ensemble des cardinaux dans le langage moderne. En effet, une telle définition n'interdit pas une extension de concept dont les objets subsumés sont dans une quantité infinie.

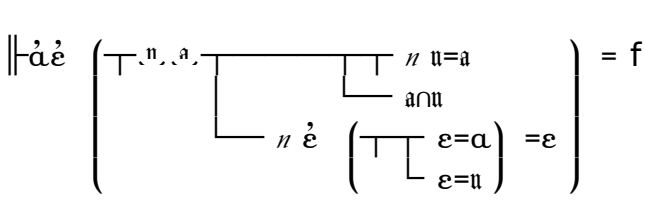
1 *Ibid.*, paragraphe 40.

2 Mais en est-on sûr ? Frege n'autorise-t-il pas *a priori* n'importe quelle valeur en entrée dans une fonction ? Voir ici page 45 pour plus de détails.

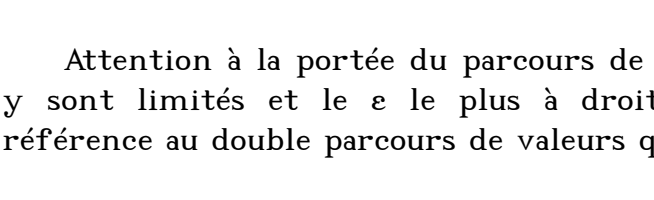
III.A.2.c Vers l'ensemble des nombres entiers

III.A.2.c.i Définition des nombres zéro et un

Comme nous l'avons vu, le concept « ┬ξ=ξ » signifie le Faux quel que soit l'objet mis à la place de ξ[1], le nombre du parcours de valeur ἐ(┬ε=ε) est donc le nombre zéro, ce que Frege note[2] :



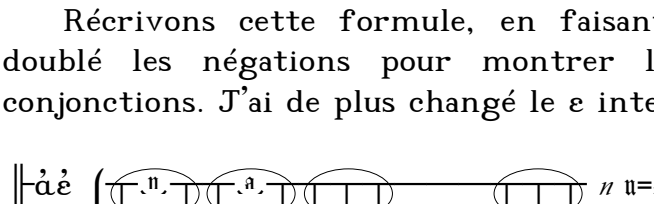
Quant au nombre un, comme il n'existe qu'un seul nombre zéro, Frege utilise le fait que l'ensemble des objets égaux au nombre zéro a pour cardinal un[3] :



L'étape suivante est de construire l'ensemble des nombres entiers.

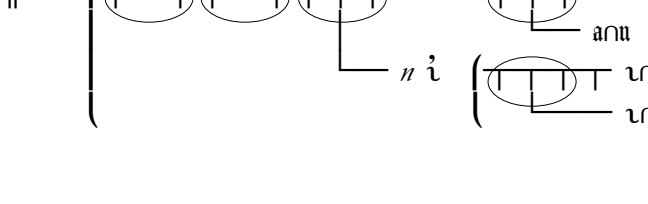
III.A.2.c.ii Successeur immédiat dans la suite des nombres

Frege définit la succession dans la suite des nombres entiers de la manière suivante[4] :



Attention à la portée du parcours de valeurs interne, les deux ε à l'intérieur y sont limités et le ε le plus à droite de l'expression est le seul qui fait référence au double parcours de valeurs qu'est f.

Récrivons cette formule, en faisant apparaître sa structure logique. J'ai doublé les négations pour montrer les quantificateurs existentiels et les conjonctions. J'ai de plus changé le ε interne pour un ι, pour plus de lisibilité :



1 Cela dit, il faut se poser la question de ce qu'on peut réellement utiliser pour remplacer ξ, voir ici page 45.

2 [Gg] I, paragraphe 41, page 58, feuille 89.

3 *Ibid.*, paragraphe 42.

4 *Ibid.*, paragraphe 43.

Traduisons dans un symbolisme hybride l'expression entre parenthèses, nommons a et e les deux nombres remplaçant $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{e}$:

$\exists \mathfrak{u}\ \exists \mathfrak{a}\ (\mathrm{card}(\mathfrak{u})=\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}\cap\mathfrak{u} \wedge \mathrm{card}\{\mathfrak{i}/\mathfrak{i}\cap\mathfrak{u} \wedge \neg\ \mathfrak{i}\cap\mathfrak{a}\}=\mathfrak{e})$

Remarquons que $\mathfrak{u}$ est une extension de concept, que $\mathfrak{a}$ est un nombre (donc aussi une extension de concept) et que $\mathfrak{i}$ est un objet quelconque. Poursuivons avec une expression complètement moderne :

$\exists p\ \exists n\ (\mathrm{card}(p)=n \wedge n\in p \wedge \mathrm{card}\{x/x\in p \wedge x\notin a\}=e)$
$\exists p\ \exists n\ (\mathrm{card}(p)=n \wedge n\in p \wedge \mathrm{card}(p\setminus\{a\})=e)$

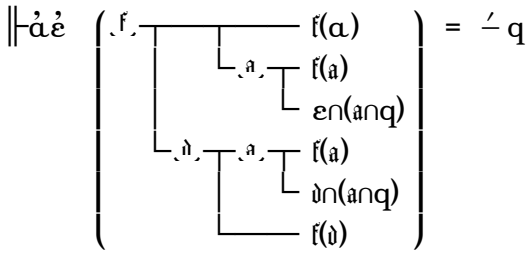
Il suffit de choisir p comme un ensemble de nombres de cardinal a et tel que $a\in p$. On a donc :
$e=\mathrm{card}\ p-1=a-1$
Donc a suit bien e dans la suite des nombres.

Ainsi Frege écrit que $\mathfrak{0}\cap(\mathfrak{1}\cap f)$[1], c'est-à-dire que 1 suit 0 dans la suite des nombres.

Ceci est tout de même restrictif car elle limite la succession à la succession immédiate. Or l'*Idéographie* possède une théorie générale des suites[2], que Frege va réutiliser (en modifiant les notations), à un détail près : la suite en question ici (la suite des nombres entiers) n'a ni structure arborescente ni structure circulaire, chaque nombre n'a qu'un successeur immédiat et il y a un unique premier terme.

III.A.2.c.iii Successeur dans la suite des nombres

Voici la définition de successeur (non-immédiat) dans la suite q[3] :



Frege a repris la définition de l'*Idéographie* telle quelle, mais sans notation particulière pour l'hérédité. Il est plus simple de l'étudier en partant de la forme qu'elle prend dans l'idéographie.

1 *Ibid.*
2 Elle est tellement générale qu'elle peut aussi s'appliquer aux structures en arbre ou en cercle, comme Frege le signale paragraphe 23, page 75.
3 [Gg] I, paragraphe 45, page 60, feuille 91, mais aussi *Idéographie*, paragraphe 26, page 81 où la partie inférieure de la formule que nous allons analyser d'abord, prend une autre notation.

Ainsi la partie suivante caractérise l'hérédité du concept 𝔣 dans la suite déterminée par q[1] :

```
—𝔡,┬𝔞,┬ 𝔣(𝔞)
   │  └ 𝔡∩(𝔞∩q)
   └────── 𝔣(𝔡)
```

Traduisons : quel que soit 𝔡 vérifiant 𝔣, tout 𝔞 qui suit 𝔡 dans la suite q vérifie aussi 𝔣. Donc la propriété 𝔣 est bien transmise de proche en proche tout au long de la suite q, elle est bien héréditaire dans la suite déterminée par q.

Reprenons la définition de ⁻́q, et remplaçons les lettres grecques α et ε par a et e, et g la fonction représentée par q :

∀𝔣, {𝔣 est héréditaire par q → [(∀𝔞 g(e,𝔞) → 𝔣(𝔞))] → 𝔣(a)}, soit :

Dans la suite q, si tout concept 𝔣 héréditaire tel que tout 𝔞 qui suit e vérifie 𝔣, alors a vérifie 𝔣.

Frege aurait pu écrire que e vérifie 𝔣 mais ce n'est pas nécessaire, puisque les successeurs de e (qui vérifient 𝔣) se chargent eux-mêmes de transmettre 𝔣 à leurs successeurs, puisque 𝔣 est héréditaire.

En d'autres termes, quelle que soit le concept héréditaire qui nous intéresse ici, il est transmis de e à a (puisque a vérifie 𝔣), cela veut dire que a est bien un successeur non-nécessairement immédiat de e, autrement dit que a>e.

Pour terminer, Frege définit a⩾e de la manière suivante[2] :

```
||-𝔞𝔢 (┬── α=ε      ) = ◡́q
      (└┬ ε∩(α∩⁻́q)  )
```

Or ┬── A est en notation moderne ¬(¬B ∧ ¬A) soit A∨B.
└┬ B

Donc, en reprenant les conventions et notations précédentes, e∩(a∩◡́f) s'écrit de manière moderne a>e ∨ a=e, c'est bien la définition de a⩾e.

III.A.2.c.iv Ensemble des nombres entiers

Avec ceci, nous pouvons donc définir le concept de nombre entier naturel, c'est-à-dire le concept de nombre qui suit non-nécessairement immédiatement 0 dans la suite des entiers :

𝔇∩(ξ∩◡́f)

Et ainsi l'extension de ce concept :

1 [Ig], paragraphe 24, pages 75 à 78.
2 [Gg] I, paragraphe 46, page 60, feuille 91.

$\grave{a}(\grave{\alpha}\cap(\alpha\cap\breve{\ } f))$

Ceci définit donc l'ensemble des nombres entiers, ou du moins selon le vocabulaire de Frege, une manière de savoir si un objet quelconque est un nombre entier positif ou non.

III.A.3 Une construction effective, apparemment non contradictoire

Cette construction des nombres, présentée dans les *Fondements de l'arithmétique*, et réalisée dans les *Lois fondamentales* illustre et commence à poser les problèmes que posent les conceptions épistémologiques de Frege, ainsi celui des valeurs possibles des indéterminées que nous verrons en dernier, étant donné son rôle le plus fondamental et à la racine même de l'échec des *Lois fondamentales*, mais aussi du rôle des explications, difficile à comprendre pour un lecteur moderne et tout d'abord le cas spécifique — du moins lors de ma première lecture de l'*Idéographie* — des substitutions. Suivrons une étude des principes premiers et des modes d'inférence, puis pour terminer par les valeurs possibles des indéterminées.

III.B Les substitutions dans l'*Idéographie*

Pour commencer, la lecture pas à pas de l'*Idéographie* m'a fait buter sur quelques substitutions, par exemple sur celles de la preuve de la proposition 68 ou de la proposition 65. J'effectuais les substitutions dans l'ordre indiqué par Frege.

Certes nous n'avons pas rencontré de substitution explicitement dans la construction du nombre, mais elle est sous-jacente. En effet, Frege remplace régulièrement un parcours de valeurs noté par une lettre par un autre parcours de valeurs, par exemple construit explicitement. Ainsi la formule[1] suivante où Frege définit la succession dans la suite des nombres :

$$\Vdash \grave{a}\grave{\varepsilon}\left(\begin{array}{l}\alpha=\varepsilon\\ \varepsilon\cap(\alpha\cap\breve{-}\,q)\end{array}\right)=\breve{\ }q$$

Il est clair que Frege remplace un parcours de valeurs par un autre, ici $\breve{-}\,q$, et il remplace une proposition par $\varepsilon\cap(\alpha\cap\breve{-}\,q)$.

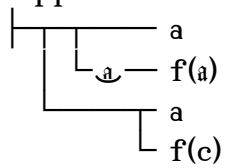
Il s'agit ici d'autre chose : de l'usage systématique et particulier des substitutions dans l'*Idéographie* et qu'on ne retrouve pas dans les *Lois fondamentales*. Il est mentionné ici parce que je pensais y trouver une présence du temps.

1 *Ibid.*

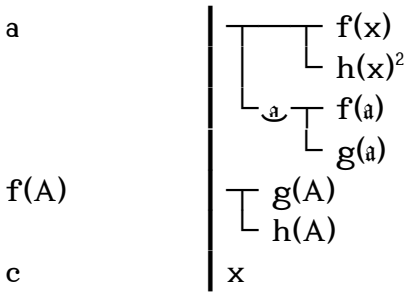
III.B.1 La formule 65

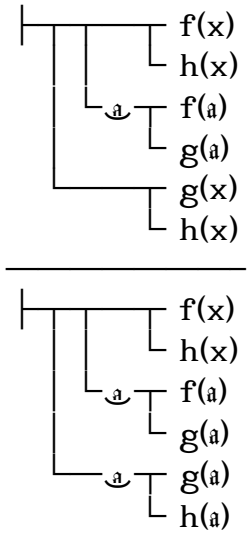
Ainsi, voici ce qu'écrit Frege[1] pour la formule 65, le rappel de la formule 61 excepté :

Rappel de la formule 61 :



(61) :





(65.

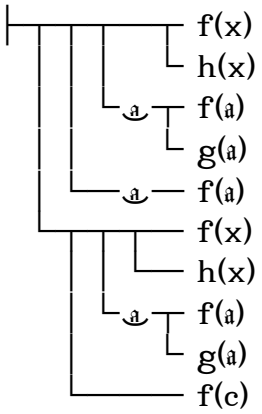
Ce qui signifie qu'en remplaçant a, f(A) et c dans la formule 61 par les expressions en regard, et sachant que la proposition au-dessus du long trait horizontal est vraie, alors on peut la détacher du théorème obtenu, selon la règle du *modus ponens*, pour obtenir la formule 65.

Ce qui donne successivement, si on suit l'ordre des substitutions sans réfléchir :

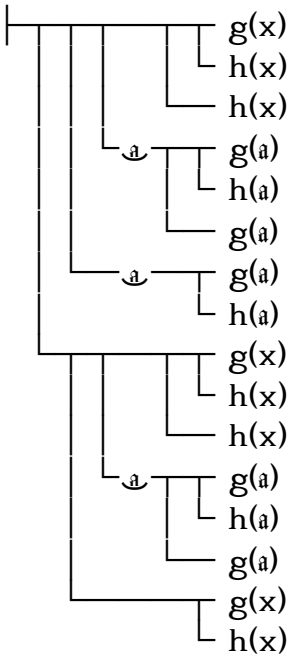
1 [Ig], paragraphe 22, page 72.

2 Une faute de frappe dans le texte a fait écrire g au lieu de h.

On remplace a :

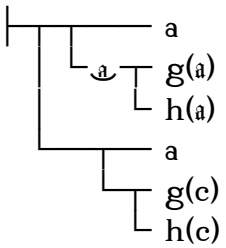


On remplace f(A) puis c :

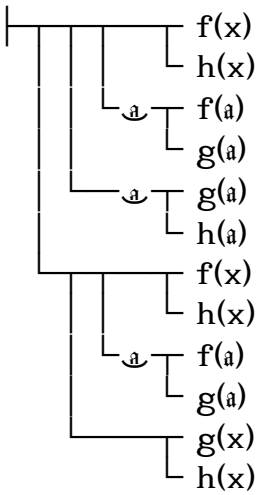


Remarquons que f a disparu, il est donc bien difficile de reconnaître la formule 61 après ces substitutions alors qu'habituellement Frege obtient exactement la formule demandée. Le lecteur peut inverser l'ordre des substitutions, d'abord f(A) puis a :

On remplace f(A) :



On remplace a puis c :



On reconnaît bien là la formule qui nous permet de déduire la formule 65 par *modus ponens*. En effet, la formule à droite ci-dessus est de la forme si A alors B, comme A est vraie (c'est la formule écrite au-dessus du trait horizontal page 30), on en conclut B, c'est-à-dire la formule 65.

III.B.2 La formule 68

Inversement, si on suit l'ordre de présentation des substitutions de la preuve de la formule 68[1], Frege écrit ceci, le rappel de la formule 57 excepté :

Rappel de la formule 57 :

```
├──┬── f(c)
│  └── f(d)
└──── (c≡d)
```

(57) ::

f(A)	A
c	𝔞 f(𝔞)
d	b

```
├──┬──────── f(c)
│  │      └── b
│  │         └── [(𝔞 f(𝔞))≡b)
│  └──𝔞── f(𝔞)
│     └── b
└──────── [(𝔞 f(𝔞))≡b)                    (67.
──────────────────────────────────────────
├──┬── f(c)
│  └── b
└──── [(𝔞 f(𝔞))≡b)                        (68.
```

Ce qui signifie qu'on remplace f(A), c et d dans la formule 57, ce qui devrait permettre de conclure à la formule 68.

On remplace f(A) :

```
├──┬── c
│  └── d
└──── (c≡d)
```

On remplace c puis d :

```
├──┬──𝔞── f(𝔞)
│  └── b
└──── ((𝔞 f(𝔞))≡b)
```

On a encore une application du *modus ponens*, avec ici A la formule ci-dessus à droite et si A alors B la formule 67, on en conclut B donc la formule 68.

Remarquons cependant que f apparaît à droite et à gauche de la ligne de substitution, comme dans la preuve de la formule 65. Si on échange l'ordre de substitution, encore une fois sans réfléchir on obtient alors une toute autre conclusion :

On remplace c :

```
├──┬── f(𝔞 f(𝔞))
│  └── f(d)
└──── ((𝔞 f(𝔞))≡d)
```

On remplace f(A) puis d :

```
├──┬──𝔞── 𝔞
│  └── b
└──── ((𝔞 𝔞)≡b)
```

Ce qui est un cas particulier du résultat de la substitution précédente, cas où f est l'application identité. Mais cela ne permet pas de conclure comme précédemment par *modus ponens*.

1 [Ig], paragraphe 22, pages 69 et 70.

III.B.3 Une fausse piste

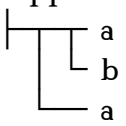
Je me demandais si en fait il n'y avait par un problème de rapport au temps, ou du moins d'une importance sous-jacente de celui-ci sur ces passages de l'*Idéographie*. Il n'en est rien pour deux raisons :

1. Les substitutions effectuées ici sont simultanées, dans le sens qu'elles ne concernent que les caractères existant au départ dans l'expression. Par exemple si on reprend la preuve de la formule 68 que nous venons de voir, dans

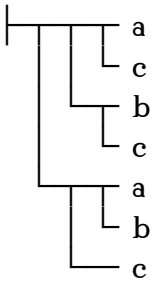
   ├─┬─ *f*(⌣ f(𝔞))
   │ └─ *f*(d)
   └── ((⌣ f(𝔞))≡d)

   , seuls les termes f en italiques — les seuls présents initialement — doivent être substitués dans l'étape suivante. De même dans la preuve de la formule 65, seuls les termes f qui n'ont pas été ajoutés par la substitution sont remplacés. On a parfaitement le droit de substituer arbitrairement les termes f qui nous plaisent, seulement le tableau des substitutions de Frege impose d'effectuer toutes les substitutions possibles, mais uniquement celles disponibles dans l'expression initiale. En d'autres termes, c'est comme si les termes ajoutés étaient protégés contre la substitution ou renommés temporairement. De plus, une relecture du passage où Frege introduit la substitution est précisément du même type, le rappel de la formule 1 excepté[1] :

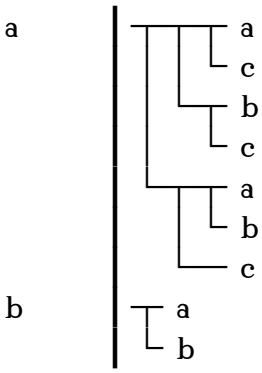
Rappel de la formule 1 :

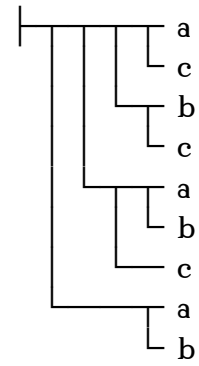


2



(1) :





(3.

Il faut remarquer que les termes a et b apparaissent à droite et à gauche du trait de substitution, Frege dans ses explications[2] prend soin de ne pas

1 [Ig], paragraphe 15, page 44.
2 *Ibid.*, pages 45 et suivantes.

remplacer les a et les b nouvellement ajoutés par la substitution, substitution d'ailleurs effectuée d'un seul trait[1] ;

2. L'ordre d'écriture des preuves des formules peut avoir une importance épistémologique ou un intérêt pédagogique mais elle n'est pas de nature temporelle ou causale. Une formule démontrée vraie est vraie, indépendamment des formules qui ont servi à sa preuve, on aurait très bien pu la démontrer à partir d'autres formules.

Il faut noter que Frege substitue toutes les occurrences rencontrées alors qu'il n'y est pas tenu, selon la formulation même de Leibniz (traduite en français)[2] : « sont identiques les choses qui *peuvent* être substituées les unes aux autres, la vérité restant sauve » (nous soulignons). Il aurait très bien pu ne substituer que quelques termes voire substituer des termes ajoutés par une précédente substitution, comme proposé ci-dessus lorsque mes substitutions aboutissaient à des formules non présentes dans L'*Idéographie*.

Cette recherche est donc une fausse piste, la difficulté n'est qu'apparente. Elle souligne un usage de la substitution assez restrictif bien que systématique. Nous n'allons pas trouver ici de faille, du moins dans L'*Idéographie*.

III.C La justification des axiomes

Parmi ce qui peut être compris chez Frege comme des explications, il faut bien différencier ce qui relève d'une part de l'explicitation d'une définition, où Frege explique que sa définition correspond bien à ce qu'il veut abréger, et d'autre part les justifications des principes premiers, des lois fondamentales qu'on peut appeler axiomes vu leur rôle identique à celui des notions communes euclidiennes. Nous n'étudierons ici que les justifications d'axiomes et les explications des dérivations des jugements, qui peuvent être des justifications.

Il est remarquable que Frege justifie ses axiomes ou propositions premières, les propositions 1, 2, 8, 28, 31, 41, 52, 54 et 58 de l'*Idéographie*[3] ainsi que le *modus ponens*[4], tout comme il justifie les lois fondamentales[5] ainsi que les méthodes de dérivation de jugements[6] dans les *Lois fondamentales*. Pour être plus précis, il les justifie presque toutes[7] en utilisant le langage commun et non en utilisant l'idéographie.

En effet, ces axiomes ou propositions premières, ne sont pas démontrables à l'aide de l'idéographie puisqu'elles servent précisément à sa construction, et que Frege s'impose de ne démontrer qu'à partir de ces règles et principes premiers. Cela dit, comme Frege veut que son idéographie saisisse la chose même logique, elles doivent être vraies et comprises du lecteur. Frege non seulement explique leur contenu mais les justifie, en ce sens qu'elles peuvent être comprises comme

1 *Ibid.*, page 45.
2 [FA], paragraphe 65, page 191, et traduit par A. Benmakhlouf dans le *Vocabulaire de Frege*, page 27.
3 Leur liste est dans [Ig], paragraphe 13, pages 40 et 41.
4 *Ibid.*, paragraphe 6, pages 21 et suivantes.
5 [Gg] I, paragraphes 18 à 20, pages 34 à 36, feuilles 65 à 67.
6 *Ibid.*, paragraphes 14 à 17, pages 25 à 33, feuilles 56 à 64.
7 Voir ici page 42 l'exception de la *consequentia mirabilis*.

une démonstration dans le cadre des mathématiques et de la logique communes — et non de la logique et des mathématiques idéographiques.

III.C.1 Les axiomes

III.C.1.a Dans l'*Idéographie*

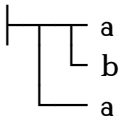
Les axiomes de l'*Idéographie*, dont la liste est fournie précédemment, sont bel et bien des axiomes, en ce sens qu'ils sont pris pour vrais par Frege, et leur fausseté n'est en aucun cas envisagée. Frege les considère comme des évidences, à la manière des axiomes euclidiens, qu'il faut néanmoins parfois expliquer, expliciter ou justifier pour le lecteur.

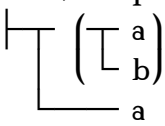
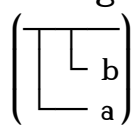
III.C.1.a.i Les formules non évidentes

Ainsi, Frege explicite les formules 1[1], 2[2], 8[3] et 28[4] en revenant à la disjonction des quatre cas de vérité de la conditionnalité et il conclut à la vérité de la proposition.

III.C.1.a.i.a La formule 1

Par exemple Frege exprime la formule 1 de la manière suivante[5] :



Elle signifie, en écriture moderne : $a \rightarrow (b \rightarrow a)$, ou comme Frege l'écrit souvent, (a et b) implique a, soit $(a \wedge b) \rightarrow a$. Notons que Frege ne justifie pas le passage de  à ce qu'on pourrait noter  — a , c'est-à-dire celui de $a \rightarrow (b \rightarrow a)$ à $(a \wedge b) \rightarrow a$ ou d'une manière plus générale, de $a \rightarrow (b \rightarrow c)$ à $(a \wedge b) \rightarrow c$[6]. Notons que Frege ne démontre ni ne signale que $a \wedge b$ est équivalent à $b \wedge a$.

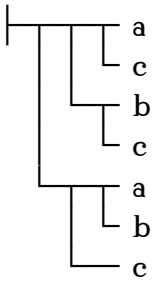
Voyons maintenant cette justification de plus près :

Cette formule dit que le cas où a est nié, b affirmé et a affirmé est exclu, en effet, a ne peut pas à la fois être vrai et faux. Frege utilise ainsi la principe de non contradiction $\neg(a \wedge \neg a)$, non explicité mais considéré comme évident.

1 [Ig], paragraphe 14, page 41.
2 *Ibid.*, pages 41 à 43.
3 *Ibid.*, paragraphe 16, pages 50 et 51.
4 *Ibid.*, paragraphe 17, page 60.
5 *Ibid.*, paragraphe 14, page 41.
6 Voir en annexe la preuve de l'équivalence et de la tautologie de ces deux propositions.

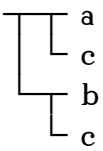
III.C.1.a.i.b La formule 2

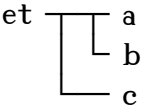
Dans le cas de la formule 2[1], la justification est un peu plus intéressante car plus complexe que la précédente, cette formule est :



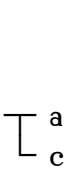
Ou en notation moderne : $[c\rightarrow(b\rightarrow a)]\rightarrow[(c\rightarrow b)\rightarrow(c\rightarrow a)]$, c'est la propriété d'auto-distributivité de l'implication par rapport à elle-même.

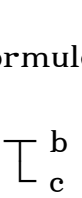
Frege la démontre de la manière suivante[2] :

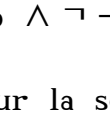
Le cas où 

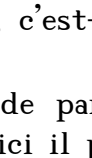
est nié et 

affirmé est exclu.

La négation de la première formule signifie que le cas où 

est nié (soit que c est affirmé et a est nié) et 

affirmé (soit que le cas où c est affirmé et b est nié, est nié), est affirmé. Notons que donc Frege utilise le fait que la double négation est une affirmation, ce qu'il n'explicitera que plus tard en tant qu'« axiome » dans les formules 31 et 41, et qu'il résumera dans la préface[3] en $\vdash(\neg\neg a \equiv a)$, à comprendre comme suit $\vdash[(\neg\neg a) \equiv a]$. Soit en notation hybride 

$\wedge\ \neg$ 

, c'est-à-dire $(c\rightarrow b) \wedge c\wedge\neg a$. Frege utilise encore la double négation pour la seconde partie de l'expression et choisit la présentation qui l'arrange, par exemple ici il préfère l'expression qui fait ressortir les faits c et $\neg a$ ainsi que la conditionnalité $c\rightarrow b$ plutôt que de l'écrire sous la forme $\neg(c\wedge\neg b)$. Donc c est affirmé, donc selon $(c\rightarrow b)$, b est aussi affirmé et a est nié.

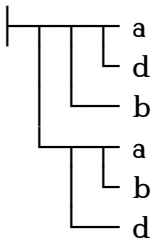
Ceci contredit la deuxième formule qui signifie que le cas où c et b sont affirmés et a nié est exclu, soit que $\neg(b\wedge c\wedge\neg a)$.

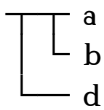
On reconnaît ici encore la loi de non contradiction $\neg(d\wedge\neg d)$ avec $d = b\wedge c\wedge\neg a$.

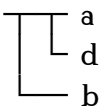
III.C.1.a.i.c La formule 8

Cette formule est la suivante, elle exprime le fait que l'ordre de conditionnalité n'importe pas[4] :

1 [Ig], paragraphe 41, pages 41 à 43.
2 *Ibid.*, page 42.
3 *Ibid.*, préface, page 9.
4 *Ibid.*, paragraphe 16, pages 50 et 51.



Frege la justifie en expliquant que 

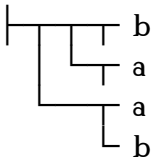
et 

signifient la même chose, étant donné qu'elles signifient, comme nous l'avons vu pour la formule 1,

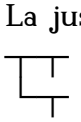
, c'est-à-dire (d∧b)→a et (b∧d)→a.

III.C.1.a.i.d La formule 28

Terminons par la formule 28, qui exprime, et Frege le dit, le passage du *modus ponens* au *modus tollens*, autrement dit de l'implication à la contraposition[1] :



La justification se conduit ainsi :



signifie que ¬(¬a∧¬¬b), soit ¬(¬a∧b) (encore un usage de la règle de double négation).

signifie que ¬(b∧¬a), c'est-à-dire la formule précédente.

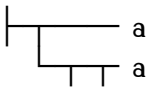
Comme ces deux formules sont équivalentes, l'implication est donc vraie.

III.C.1.a.ii Les formules évidentes

En revanche, les formules 31[2], 41[3], 52[4], 54[5] et 58[6] sont expliquées brièvement vu leur évidence.

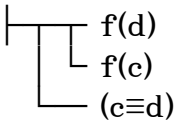
Par exemple la formule 31 :

1 *Ibid.*, paragraphe 17, page 60.
2 *Ibid.*, paragraphe 18, pages 61 et 62.
3 *Ibid.*, paragraphe 19, page 64.
4 *Ibid.*, paragraphe 20, pages 68 et 69.
5 *Ibid.*, paragraphe 21, page 69.
6 *Ibid.*, paragraphe 22.



Elle nie que « la négation de la négation, à savoir l'affirmation »[1] de a est affirmée alors que a est niée. Il s'agit encore du principe de non-contradiction précédé de la double négation. La formule 41 est la réciproque de la formule 31 et est justifiée de la même manière.

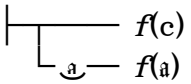
La formule 52 :



Elle affirme que si c a le même contenu conceptuel[2] que d et si c vérifie f alors d vérifie f aussi ; ce qui est évident si c et d désignent le même objet.

La formule 54 affirme que c≡c.

Voyons enfin la formule 58 :

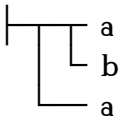


Elle affirme que si quel que soit a, a vérifie f, alors un c particulier vérifie aussi f.

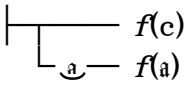
Beaucoup de ces axiomes seront réutilisés tels quels ou généralisés dans [Gg].

III.C.1.b Dans les *Lois Fondamentales*

La formule I[3] est identique à la formule 1 de l'*Idéographie* :



La formule IIa[4] est identique à la formule 58 de l'*Idéographie* :



1 *Ibid.*, paragraphe 18, pages 61 et 62.
2 Ce que Frege appellera à partir de l'article *Sens et dénotation* la dénotation ou la signification, voir le glossaire.
3 [Gg] I, paragraphe 18, page 34, feuille 65.
4 *Ibid.*, paragraphe 20, page 35, feuille 66.

IIb[1] est sa variante pour une fonction 𝔣 du premier niveau qui prend en argument un objet β, qui n'est là que pour signifier cet état de fait :

```
├┬─── Ω_β(Φ(β))
 └𝔣── Ω_β(𝔣(β))
```

Soit [∀𝔣 Ω(𝔣)]→Ω(Φ).

La formule III[2] est une généralisation de la formule 52 de l'*Idéographie* :

```
├┬ g ⎛𝔣┬ 𝔣(a)⎞
 │   ⎝ └ 𝔣(b)⎠
 └ g (a=b)
```

Cette formule 52 est le cas où g est l'identité.

La formule IV[3] exprime en quelque sorte à la fois a=a et ¬¬a=a :

```
├┬── (— a)=(—b)
 └┬ (— a)=(┬b)
```

C'est-à-dire que si la proposition a n'est pas équivalente à la proposition non b, alors a est équivalente à b (les traits horizontaux permettent de traiter les cas où a et b ne sont pas des propositions comme des cas faux).

La formule V[4] :

├ [ὲ(f(ε))=ὰ(g(α))]=[𝔞 f(𝔞)=g(𝔞)]

Elle exprime le fait que les graphes des fonctions f et g sont égaux (qu'on peut aussi comprendre comme les éléments tombants sous les concepts f et g) si et seulement si ∀a f(a)=g(a) ; ce qui ne pose pas de problème en soi, à condition de ne pas autoriser n'importe quelles fonctions, voir page 45.

Enfin, la formule VI[5] :

├ a = \ὲ(a=ε)

Soit a est le x tel que a=x. La notation \ὲ(f(ε)) qui est celle de l'article défini, a été précisée précédemment[6], elle signifie :

1. x s'il n'y a qu'un seul x tel que f(x), f étant un concept ;

1 *Ibid.*, paragraphe 25, page 42, feuille 73.
2 *Ibid.*, paragraphe 20, page 36, feuille 67.
3 *Ibid.*, paragraphe 18, page 34, feuille 65.
4 *Ibid.*, paragraphe 20, page 36, feuille 67.
5 *Ibid.*, paragraphe 18, page 34, feuille 65.
6 *Ibid.*, paragraphe 11, pages 18 à 20, feuilles 49 à 51.

2. ἐ(f(ε)) s'il y en a plusieurs, si f n'est pas un concept ou s'il n'y a aucun x tel que f(x).

Toutes ces formules nécessitent bien moins d'explications que celles de [Ig], du moins en apparence. Nous en reverrons ici page 45, à propos des indéterminées.

Voyons maintenant les dérivations des jugements.

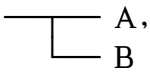
III.C.2 La dérivation des jugements

La dérivation des jugements est un point central de la construction frégéenne, étant donné que tous ses théorèmes sont déduits soit d'autres théorèmes soit d'axiomes, la déduction s'effectuant de manière strictement logique en utilisant un mode d'inférence prévu et justifié auparavant. Cela dit, les justifications de ces modes, comme nous allons le voir, ne sont pas tous de même type.

III.C.2.a Dans l'*Idéographie*

Frege justifie le *modus ponens* très tôt, en se ramenant à la « définition » de la conditionnalité (l'implication) par disjonction des quatre cas. Notons que ce n'est pas une définition au sens de l'idéographie[1] mais un terme premier, posé.

La définition de la conditionnalité est rappelée page 16, expliquons maintenant le *modus ponens* :

Supposons que dans la conditionnalité 

, on ait B vraie. Cela signifie que parmi les quatre cas présents — à savoir A vraie et B vraie, A vraie et B fausse, A fausse et B vraie, et A fausse et B fausse — parmi ces cas donc, B vrai et A fausse est nié, « mais l'une des trois autres a lieu »[2]. Comme B est vraie, l'autre qui a lieu est B vraie et A vraie. En effet, comme B n'est pas fausse, les deux cas qui présentent B comme fausse ne se présentent pas. Ce qui suppose que la double négation est une affirmation, ce que Frege n'a pas pris comme axiome à ce moment ; cela dit, il ne fait qu'expliciter et non démontrer à ce moment de l'*Idéographie*.

D'où la conclusion que A est aussi vraie. Il introduit alors la notation de la déduction, exposée par exemple ici page 30 et suivantes. C'est la seule méthode de dérivation des jugements présente explicitement dans l'*Idéographie*. Les autres, que nous reverrons ci-après, ne sont écrites pour le moment que comme des axiomes, comme les formule 28 ou 58.

Voici la notation utilisée, le rappel de l'hypothétique excepté :

1 Qui est une abréviation d'un objet déjà existant ; Frege condamne la définition créatrice de son objet, voir par exemple [FA], paragraphe 8, pages 133 et 134.

2 [Ig], paragraphe 5, page 19.

Rappel de la formule X :

$$\vdash\!\!\!\top\!\!\!\lfloor \begin{array}{l} A \\ B \end{array}$$

(X) :

$$\frac{\vdash B}{\vdash A}$$

Dans le cas où le rappel est la donnée de l'hypothétique (notez les doubles deux points à gauche) :

Rappel de la formule XX :

$$\vdash B$$

(XX) ::

$$\frac{\vdash\!\!\!\top\!\!\!\lfloor \begin{array}{l} A \\ B \end{array}}{\vdash A}$$

Dans le cas où on rappelle plusieurs formules, le trait d'inférence est doublé en ═══, la liste des formules rappelées est placée au même endroit.

III.C.2.b Dans les *Lois fondamentales*

Voyons maintenant les dérivations des jugements dans les *Lois fondamentales*, qui contrairement à l'*Idéographie*, sont nombreuses. Frege s'y félicitait[1] d'avoir réduit le nombre de règles d'inférence à une (mais il admet qu'elles puissent plus tard se multiplier), ici elles sont variées.

Le *modus ponens*[2] est posé de la même manière que dans l'*Idéographie* : par disjonction des cas, il y est notée de la même manière. Nous n'y reviendrons pas.

III.C.2.b.i La transitivité de l'implication

Frege explique la transitivité de l'implication[3], c'est-à-dire que de $\vdash\!\!\!\top\!\!\!\lfloor \begin{array}{l} A \\ B \end{array}$ et de $\vdash\!\!\!\top\!\!\!\lfloor \begin{array}{l} B \\ C \end{array}$ on peut déduire $\vdash\!\!\!\top\!\!\!\lfloor \begin{array}{l} A \\ C \end{array}$; ou en notation moderne de C→B et de B→A on en déduit C→A.

En effet, supposons C vraie. La deuxième formule permet d'en conclure que B est vraie, et la première que A est vraie. Donc il est faux d'avoir à la fois C vraie et A fausse, c'est bien ainsi que Frege a posé $\vdash\!\!\!\top\!\!\!\lfloor \begin{array}{l} A \\ C \end{array}$.

Frege a donc réutilisé la disjonction des cas pour justifier ce mode d'inférence.

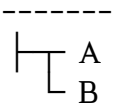
Ce mode est symbolisé par un trait tireté simple -------- ou double comme pour le *modus ponens*, de la manière suivante, le rappel excepté :

1 *Ibid.*, préface, page 9.
2 [Gg] I, paragraphe 14, page 25, feuille 56.
3 *Ibid.*, paragraphe 15, pages 26 et 27, feuilles 57 et 58.

Rappel de la formule X :

(X) :

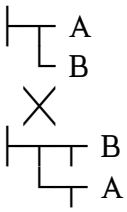
(Formule XX)



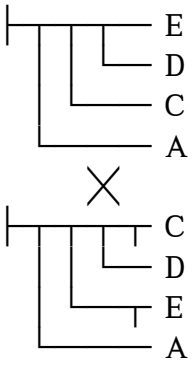
III.C.2.b.ii La contraposée

Frege présente la contraposée[1], présentée dans [Ig] en tant que formule 28, cette fois non plus comme une formule mais comme un mode d'inférence, encore justifié.

Elle est notée avec une croix ╳ comme suit :



Elle est aussi présentée de la manière suivante :

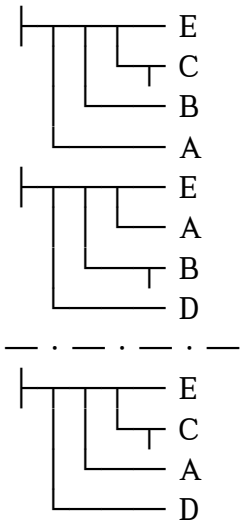


Frege la justifie toujours par disjonction des cas, de la même manière que la formule 28 de [Ig] (c'est-à-dire en utilisant la double négation et la commutativité de ∧). La présence des autres propositions ne gêne pas la justification. En effet, la première s'exprime en notation moderne ainsi ¬(A∧C∧D∧¬E) et la deuxième ¬(A∧¬E∧D∧¬¬C).

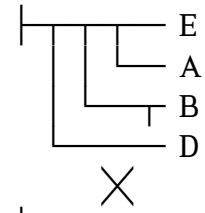
III.C.2.b.iii La *consequentia mirabilis*

La méthode d'inférence suivante est en fait une généralisation de (¬A→A)→A, de la même manière que le précédent était une généralisation de la contraposée ; c'est pourquoi je l'appelle *consequentia mirabilis* ou loi de Clavius[2]. Voici ce mode :

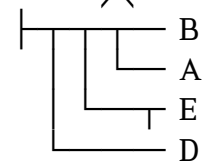
1 *Ibid.*, page 27, feuille 58.
2 *Ibid.*, paragraphe 16, page 30, feuille 61.

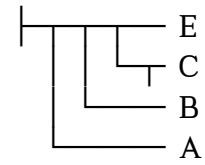


Cette fois-ci, Frege le démontre en utilisant les autres modes d'inférence[1] :

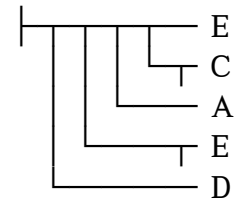


(on échange E et B)

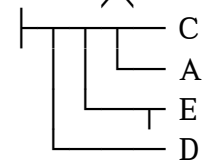




---------- (c'est-à-dire la transitivité avec B comme moyen terme)

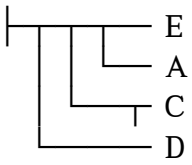


(on échange C et E, et deux fois ¬E font une seule fois ¬E)



(on échange de nouveau C et E)

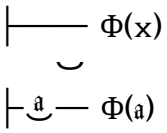
1 *Ibid.*



On obtient bien la formule souhaitée, à l'ordre des données près (qui n'est d'ailleurs pas important comme nous l'avons déjà vu). Il est remarquable que Frege démontre ce mode d'inférence et c'est le seul, avec une rigueur parfaitement acceptable vu ses canons, en d'autres termes Frege le démontre en utilisant d'autres modes et en respectant parfaitement ses critères de rigueur pour une vraie preuve idéographique, et qui n'est donc plus une justification utilisant le langage commun.

III.C.2.b.iv La généralisation

Le dernier mode d'inférence est la généralisation à partir d'un cas particulier arbitraire[1], de Φ(x), x étant arbitraire, on déduit pour tout 𝔞 Φ(𝔞); et déjà mentionné dans l'*Idéographie*[2]. Il est ici exprimé comme mode d'inférence à part entière et est en quelque sorte la réciproque de la formule 58 de l'*Idéographie*.



III.C.3 Vers une démonstration des principes fondamentaux ?

Il est notable que ses justifications sont acceptables comme preuves par un mathématicien, en ce sens qu'elles sont traduisibles presque telles quelles dans le formalisme moderne utilisant les valeurs de vérité V et F — voir par exemple la première annexe — et que cela démontre. Rappelons que Frege ne les considère que comme des explications, des justifications pour le lecteur, autrement dit une intrusion contrôlée et circonscrite de la psychologie, et non comme de vraies preuves qui doivent se faire en utilisant uniquement les modes d'inférence déterminés. Il est donc nécessaire de poser un premier mode, ne serait-ce que pour démontrer les autres si cela était possible.

Une question se pose : est-il possible de démontrer à l'aide de l'idéographie plus de modes d'inférence, voire tous sauf un ? Et en élargissant : est-il possible de restreindre au maximum les principes premiers plus que ne le fait Frege dans les *Lois fondamentales*, tout en restant dans le style de Frege, voire en rendant plus rigoureuse sa construction ? Ceci n'est pas réellement un échec de l'idéographie, tout au plus un manque de profondeur ; mais vu les exigences de Frege, le lecteur peut rester sur sa faim. Cela dit, il reste encore un écueil, et de

1 *Ibid.*, paragraphe 17, page 32, feuille 63.
2 [Ig], paragraphe 11, page 35.

taille : le fait que les indéterminées utilisées par Frege n'ont pas de domaine bien délimité.

III.D Les valeurs possibles des indéterminées

La dernière mise à l'épreuve de la construction frégéenne concerne à mon sens sa faille la plus grave, à savoir l'imprécision du domaine des valeurs possibles, donc autorisées, des indéterminées.

III.D.1 L'usage strict de l'*Idéographie*

Dans L'*Idéographie*, Frege encadre strictement les valeurs possibles des indéterminées indiquées par des lettres. Par exemple une lettre romaine comme a, utilisée après un trait de jugement, ne peut être qu'une proposition[1]. Ainsi l'expression « maison » n'est pas un contenu jugeable, donc « — maison » n'a aucun sens et ne peut pas être écrite. Donc la lettre a, utilisée ainsi — a, nécessite que a soit une proposition dont la valeur de vérité est soit le Vrai, soit le Faux et rien d'autre.

Certes L'*Idéographie* ne construit pas les nombres entiers, elle construit néanmoins ce qui en sera le fondement, à savoir une théorie générale des suites, mais l'erreur y est en germe. Il sera facile ensuite à Frege de construire un quantificateur universel dont l'auteur ne se préoccupe pas de limiter un tant soit peu le domaine de validité. Prenons l'exemple de l'axiome 58, ├┬—— $f(c)$. Que
└$\smile^{\mathfrak{a}}$— $f(\mathfrak{a})$
représentent les lettres f et $\mathfrak{a}$? f doit être un concept, c'est-à-dire une fonction qui ne renvoie que des valeurs de vérité, certes mais quel type de fonction ? Y a-t-il un risque tel que la division par zéro ? De même pour $\mathfrak{a}$: si f est la fonction ξ=2 (en reprenant les notations postérieures), peut-on prendre a=⊙, où ⊙ signifie le Soleil ?[2] On se trouve devant une alternative :

1. Si oui, alors la fonction f peut prendre un argument arbitraire, contrairement à ce Frege a explicitement interdit ;
2. Si non, alors le quantificateur universel n'est plus universel, il est limité à un domaine précis, par exemple ce qu'on appelle aujourd'hui le domaine de définition de la fonction f.

On pourrait rétorquer que Frege évite cela par notion de contexte, vue ci-après, ou que les mathématiciens contournent ce genre d'alternative depuis longtemps et sans grand problème, par exemple en usant de l'implicite ; mais Frege refuse l'implicite, il veut tout mettre sur la place publique.

1 *Ibid.*, paragraphe 2, page 16, note 1.
2 Frege pose une question similaire dans [ÉLP], *Fonction et concept*, page 93 où il se demande ce que ⊙+1 pourrait bien signifier.

III.D.2 Le principe de contextualité des *Fondements de l'arithmétique*

Dans les *Fondements*, Frege développe le principe de contextualité : « On doit rechercher ce que les mots veulent dire, non pas isolément, mais pris dans leur contexte. »[1], le deuxième grand principe présenté ici. Il s'agit, dans le même esprit que précédemment, par exemple de limiter l'usage d'une lettre mais cette fois selon son contexte.

Par exemple dans l'expression — A, le contexte est un contexte logique, on attend donc A comme une proposition qui a une valeur de vérité. De même dans l'expression a+b, le contexte est arithmétique, on attend donc des nombres à la place de a et de b.

Mais un problème se pose, qu'est-ce qu'un nombre, surtout à l'époque de Frege ? Peut-on utiliser un nombre complexe en lieu et place d'un nombre entier ou le contraire ? Si oui, à quelle condition ? Que dire d'une expression comme $\sqrt{a}$? Que signifie cette expression si $a<0$ ou si $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$? Est-elle interdite ou peut-elle renvoyer deux valeurs ? La manière dont Frege use de cette notion de contexte dénote en fait un implicite, celui de l'usage commun, de l'usage le plus courant des notations et des opérateurs. Quand il écrit a+b, il pense immédiatement à des nombres entiers, parfois réels et non à des nombres complexes. Par exemple il parle de « racine quatrième positive de 2 » dans les Lois fondamentales[2] ou de « la racine quatrième positive de 2 »[3], concepts qui n'ont pas grand sens dans $\mathbb{C}$. Bien entendu, Frege sait ce qu'est un nombre complexe, néanmoins il n'en considère pas l'éventualité, et l'oubli est regrettable.

Or précisément, Frege veut bannir l'implicite et veut que la notation indique sans ambiguïté et univoquement la chose désignée, c'est impossible et la notion de contexte est clairement insuffisante au regard des développements mathématiques contemporains de Frege, comme au regard des critères de rigueur frégéens.

III.D.3 L'universalité totale des valeurs possibles des indéterminées dans les *Lois fondamentales*

Peut-être que Frege s'en est rendu compte ensuite, dans les *Lois Fondamentales* tout du moins un tel usage de la contextualité n'y apparaît plus, il remplacé par la possibilité de prise de valeur réellement universelle des fonctions.

Pour être plus clair, toute fonction admet dorénavant n'importe quoi comme argument, par exemple le trait de contenu, maintenant devenu une fonction notée — ξ, accepte non seulement des propositions mais aussi tout et n'importe quoi pour remplacer ξ. Ainsi — 2 signifie le Faux, puisque 2 n'est pas une proposition et n'a pas de valeur de vérité.

1 [FA], introduction, page 122.
2 [Gg] I, paragraphe 11, page 19, feuille 50.
3 *Ibid.*

Frege définit — ξ comme la fonction ξ=(ξ=ξ)[1]. En effet, et pour cela il faut se rappeler de l'article Sens et dénotation[2] où Frege explique qu'une proposition écrite signifie sa valeur de vérité et qu'un nom propre écrit signifie l'objet pointé par ce nom[3] :

1. Si A est une proposition vraie, A=A signifie le Vrai, donc A=(A=A) signifie le Vrai ;
2. Si A est une proposition fausse, A=A signifie le Vrai mais A=(A=A) signifie le Faux, puisque le Vrai n'est pas égal au Faux ;
3. Si A est autre chose qu'une proposition, disons le Soleil, A=A signifie le Vrai mais A=(A=A) signifie le Faux puisque le Soleil n'est pas le Faux.

De la même manière, Frege fait accepter n'importe quelle valeur possible comme objet donné comme paramètre à une fonction, ainsi ⊙+1 signifie le Faux puisque le Soleil n'est pas un nombre. De la même manière, n'importe quelle fonction du premier niveau f(ξ) est possible, quand il écrit —𝔞⌣— f(𝔞).

Certaines d'entre elles, de par leur trop grande généralité et leur trop grande tolérance aux expressions logiquement surprenantes, créeront l'antinomie proposée par Russell[4] : ┬ξ∩ξ, c'est-à-dire le concept de ne pas être prédiqué de soi-même, plus connu sous le nom du paradoxe du barbier. Ce concept créera, conjugué avec la loi V des Lois fondamentales, une contradiction qui obligera Frege à reformuler cette loi V en interdisant explicitement le fait qu'une fonction puisse se prédiquer elle-même :

Il la modifie, où avant elle était la formule :

$$\vdash [\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\alpha}(g(\alpha))]=[\frown_{\mathfrak{a}}\ f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a})]$$

Elle devient la formule :

$$\vdash [\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon))=\dot{\alpha}(g(\alpha))]=\left(\frown_{\mathfrak{a}}\begin{array}{l} f(\mathfrak{a})=g(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{a}=\dot{\varepsilon}(f(\varepsilon)) \\ \mathfrak{a}=\dot{\varepsilon}(g(\varepsilon)) \end{array}\right)$$

Mais cela n'interdit toujours pas des formules plus complexes et tout aussi problématiques comme ┬ξ=(ξ∩ξ) et ne règle toujours pas le cas des nombres complexes, par exemple on ne sait que faire d'une formule comme celle-ci : $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. On ne sait pas ce que désignent les lettres a et b : des nombres probablement, mais lesquels ? Des entiers, des réels, des complexes, des quaternions, autre chose ?

Plus grave au regard de la théorie des ensembles moderne, la construction de Frege tombe pour autre raison, bien plus profonde mais toujours liée à cette

1 *Ibid.*, paragraphe 10, pages 16 et 17, feuilles 47 et 48.
2 [ÉLP], *Sens et dénotation*, page 108 et suivantes.
3 Nous n'étudierons pas ici le problème du nom propre d'une fonction comme la fonction carré, écrite dans l'idéographie. Une expression insaturée, qui contient une place libre symbolisée par exemple par un ξ, peut-elle signifier quelque chose ? Si oui, quoi ? La fonction elle-même ? Son parcours de valeurs ?
4 [Gg] II, appendice, traduction dans [BLA].

imprécision sur la nature des objets pris comme argument : une fonction du premier niveau accepte n'importe quel objet en argument, y compris son représentant dans le domaine des objets, à savoir son parcours de valeurs (qui est rappelons-le un objet, car son expression est saturée, sans place libre). Comme il existe d'autres objets que les parcours de valeurs (les nombres, les valeurs de vérité, les propositions…), cela veut dire que l'ensemble des fonctions de premier niveau a un cardinal inférieur ou égal à celui des objets, ce que l'on sait faux depuis Cantor : le cardinal d'un ensemble est strictement inférieur au cardinal des fonctions de cet ensemble.

La théorie frégéenne ainsi mise en acte est donc condamnée.

IV Quel bilan du projet de Frege ?

En premier lieu, Frege a réussi à fonder la logique et l'arithmétique de manière théorique en en bannissant le sensible et la psychologie ; du moins il devient difficile de les fonder de cette manière après son passage en revue destructeur. Nous avons vu comment dans les *Fondements de l'arithmétique* il déblayait philosophiquement et faisait tomber les autres théories, tout en proposant une fondation *a priori* et idéale de l'arithmétique et de la logique. C'est son grand mérite de novateur qui débroussaille et pose des jalons pour les suivants, jalons fondés sur des idées parfois nouvelles pour l'époque comme l'application en mathématiques de la vieille idée de la séparation de l'expression, du sens et de la signification mais parfois d'anciennes comme sa confiance dans les mathématiques et leur non contradiction interne et en soi, ce qui l'amènera à critiquer aussi pour cette raison la méthode des *Fondements de la géométrie* Hilbert.

En revanche l'échec pratique est patent : déjà Russell a fait tomber l'idéographie des *Lois fondamentales* de 1893 et 1903 sous le coup d'une contradiction irrésoluble, et les tentatives de Frege pour la contourner ne se sont révélées être que des rustines bien faibles. Certes, Frege construit les nombres entiers et d'autres nombres comme les fractions, sa théorie est opératoire parce qu'il réussit à partir de principes simples à démontrer des résultats à l'aide d'une notation relativement simple mais puissante ; mais la contradiction était bien plus profonde et gisait dans les fondements mêmes de la logique de Frege, non pas dans la fondation *a priori* mais dans la trop grande confiance dans l'outil logique, comme on l'a vu lors de notre étude sur les valeurs possibles des indéterminées. Il serait néanmoins intéressant de se pencher sur la corrélation entre ce vice fondamental et le fait que la logique de Frege est en premier lieu une logique des jugements et des concepts et non une logique des extensions et des ensembles (même si elle utilise les extensions de concepts dans un sens bien particulier). Cela a fait oublier que l'idéographie de 1879 est valide et ne subit pas les conséquences de ces contradictions.

Déjà à l'époque, Frege a dû batailler fermement et au début à contre courant pour que ses idées passent auprès de ses collègues ; malgré des correspondants et quelques admirateurs prestigieux, les idées Frege sont restées méconnues. Que reste-t-il de l'idéographie aujourd'hui ? Rien en mathématiques, presque rien en notations logiques qui est restée écrite en ligne comme celle des *Principia mathematica* de Russell et Whitehead, il reste quelques notations, passées par l'intermédiaire des *Principia mathematica*, comme le signe de dérivation $\vdash$ ou de négation $\neg$. Il serait intéressant de savoir ce qui peut être sauvé et réutilisé aujourd'hui de cette idéographie, comment, si cela est possible et si cela a un intérêt, on pourrait refonder l'idéographie en reprenant certains usages modernes comme la dénomination d'un ensemble, et ainsi éviter l'écueil majeur des indéterminées.

Quant au fait de savoir si la logique moderne est ou pas frégéenne de part en part, je ne suis pas suffisamment compétent en logique pour en juger.

V Table des matières

I Vers la rigueur en mathématiques : la position historique de Frege....3
I.A Algébrisation et symbolisation....3
I.B Rigueur et méthode axiomatique....3
I.C Le projet de Frege....5
II Comment Frege parvient à délimiter le lieu mathématique, fondé sur des jugements idéaux et a priori....6
II.A Réhabilitation de la spécificité du domaine mathématique contre l'empiètement des sciences empiriques....6
II.A.1 Critique du psychologisme....6
II.A.1.a La représentation n'est pas la pensée....6
II.A.1.b La représentation est foncièrement subjective....7
II.A.2 La nature des mathématiques....8
II.A.2.a Rappels de Kant....8
II.A.2.a.i Les différents jugements....8
II.A.2.a.ii Kant et les jugements mathématiques....9
II.A.2.b Fondation frégéenne du lieu des mathématiques....9
II.B Logique et langage : vers un nouveau langage mathématique....10
II.B.1 Rapports de la pensée et du langage....10
II.B.1.a La pensée ne se réduit pas au langage....10
II.B.1.b Théorie et nécessité du signe....11
II.B.1.c Insuffisance du langage commun....13
II.B.2 Nécessité d'une idéographie....14
II.B.2.a Insuffisance des notations mathématiques et logiques habituelles....14
II.B.2.b Création d'une nouvelle idéographie....15
III Mises à l'épreuve de la philosophie de l'arithmétique de Frege par la construction du nombre et par l'idéographie....18
III.A La théorie du nombre entier en exemple....18
III.A.1 Clarification de la théorie du nombre....18
III.A.1.a Réfutation de fausses théories sur le nombre....18
III.A.1.b Confusion entre l'unité et l'un....20
III.A.2 Ce qu'est le nombre, et comment il se construit....21
III.A.2.a L'essence du nombre....21
III.A.2.b Construction frégéenne du nombre....22
III.A.2.b.i Relation de plusieurs à 1....23
III.A.2.b.ii Vers l'équipotence....23
III.A.2.b.iii Définition du nombre d'un parcours de valeurs....24
III.A.2.c Vers l'ensemble des nombres entiers....26
III.A.2.c.i Définition des nombres zéro et un....26
III.A.2.c.ii Successeur immédiat dans la suite des nombres....26
III.A.2.c.iii Successeur dans la suite des nombres....27
III.A.2.c.iv Ensemble des nombres entiers....28
III.A.3 Une construction effective, apparemment non contradictoire....29

III.B Les substitutions dans l'Idéographie....29
III.B.1 La formule 65....29
III.B.2 La formule 68....31
III.B.3 Une fausse piste....32
III.C La justification des axiomes....33
III.C.1 Les axiomes....34
III.C.1.a Dans l'Idéographie....34
III.C.1.a.i Les formules non évidentes....34
III.C.1.a.i.a La formule 1....34
III.C.1.a.i.b La formule 2....35
III.C.1.a.i.c La formule 8....36
III.C.1.a.i.d La formule 28....36
III.C.1.a.ii Les formules évidentes....37
III.C.1.b Dans les Lois Fondamentales....38
III.C.2 La dérivation des jugements....39
III.C.2.a Dans l'Idéographie....39
III.C.2.b Dans les Lois fondamentales....40
III.C.2.b.i La transitivité de l'implication....41
III.C.2.b.ii La contraposée....41
III.C.2.b.iii La consequentia mirabilis....42
III.C.2.b.iv La généralisation....43
III.C.3 Vers une démonstration des principes fondamentaux ?....44
III.D Les valeurs possibles des indéterminées....44
III.D.1 L'usage strict de l'Idéographie....44
III.D.2 Le principe de contextualité des Fondements de l'arithmétique....45
III.D.3 L'universalité totale des valeurs possibles des indéterminées dans les Lois fondamentales....46
IV Quel bilan du projet de Frege ?....48
V Table des matières....49
VI Bibliographie....51
VI.A Œuvres originales de Frege....51
VI.B Littérature secondaire sur Frege....51
VI.C Autres œuvres utilisées....51
VII Annexes....53
VII.A Preuve de $a \rightarrow (b \rightarrow a) \leftrightarrow (a \wedge b) \rightarrow a$....53
VII.B Glossaire....53

VI Bibliographie

VI.A Œuvres originales de Frege

- [Ig] Gottlob Frege, *Idéographie*, traduction de C. Besson, Vrin, Paris, 1999
- [FA] Gottlob Frege, *Les fondements de l'arithmétique*, traduction C. Imbert, collection L'ordre philosophique, Seuil, Paris, 1964
- [ÉLP] Gottlob Frege, *Écrits logiques et philosophiques*, traduction C. Imbert, collection Points essais, Seuil, Paris, 1971
- [BLA] Gottlob Frege, *The basic laws of arithmetic, Exposition of the system*, tr. M. Furth, University of California press, 1964
- [Gg] Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik, Band 1 & 2*, Georg Olms Verlagsbuchhandlung Hildesheim, 1893, reproduction 1966, version papier
- [Gg] Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik, Band 1*, Georg Olms Verlagsbuchhandlung Hildesheim, 1893, reproduction 1966, version scannée disponible sur Gallica[1], pour laquelle j'utilise la double pagination : numéro de page / numéro de feuille du scan
- [FHC] *Frege-Husserl correspondance*, traduction G. Granel, T.E.R., Mauvezin, 1987
- [ÉP] Gottlob Frege, *Écrits posthumes*, direction P. de Rouilhan, C. Tiercelin, éditions J. Chambon, Nîmes, 1994

VI.B Littérature secondaire sur Frege

- A. Benmakhlouf, *Frege le nécessaire et le superflu*, Vrin, Paris, 2002
- A. Benmakhlouf, *Gottlob Frege Logicien philosophe*, PUF, Paris, 1997
- A. Benmakhlouf, *Le vocabulaire de Frege*, Ellipses, Paris, 2001
- P. de Rouilhan, *Frege Les paradoxes de la représentation*, collection Propositions, éditions de minuit, Paris, 1988
- *Gottlob Frege*, http://plato.stanford.edu/entries/frege/, Stanford Encyclopedia of Philosophy, version du 14 février 2004
- *Frege's Logic, Theorem, and Foundations for Arithmetic*, http://plato.stanford.edu/entries/frege-logic/, Stanford Encyclopedia of Philosophy, version du 14 février 2004

VI.C Autres œuvres utilisées

- R. Blanché, J. Dubucs, *La logique et son histoire*, Armand Colin, Paris, 2002
- F. Cajori, *A history of mathematical notations*, Dover, New York, 1993
- J. Dieudonné (direction), *Abrégé d'histoire des mathématiques*, chapitre XI Axiomatique et logique, M. Guillaume, Hermann, Paris, 1978
- Euclide, les *Éléments*, traduction de F. Peyrard, Blanchard, Paris, 1993
- D. Lecourt (direction), *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, PUF, Paris, 1999

1 http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-77790

- E. Kant, *Critique de la raison pure*, Gallimard, Folio essais, Paris, 1980.
- F. Rivenc, *Introduction à la logique*, Payot, Paris, 1989
- F. Rivenc, P. de Rouilhan (direction), *Logique et fondements des mathématiques (1850 — 1914) une anthologie*, Payot, Paris, 1992
- B. Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, Payot, Paris, 1991

VII Annexes

VII.A Preuve de a→(b→a) ↔ (a∧b)→a

Cette formule est la formule 1 de L'*Idéographie*.
Tableaux de vérités de a→(b→a) et de (a∧b)→a :

a	→	(b	→	a)
F	*V*	F	V	F
F	*V*	V	F	F
V	*V*	F	V	V
V	*V*	V	V	V

(a	∧	b)	→	a
F	F	F	*V*	F
F	F	V	*V*	F
V	F	F	*V*	V
V	V	V	*V*	V

Ces deux formules sont bien toutes les deux tautologiques, et donc équivalentes.

Nous pouvons néanmoins prouver la formule plus générale suivante, et que Frege énonce[1] : a→(b→c) ↔ (a∧b)→c

a	→	(b	→	c)	↔	(a	∧	b)	→	c
F	*V*	F	V	F	*V*	F	F	F	*V*	F
F	*V*	F	V	V	*V*	F	F	F	*V*	V
F	*V*	V	F	F	*V*	F	F	V	*V*	F
F	*V*	V	V	V	*V*	F	F	V	*V*	V
V	*V*	F	V	F	*V*	V	F	F	*V*	F
V	*V*	F	V	V	*V*	V	F	F	*V*	V
V	*F*	V	F	F	*V*	V	V	V	*F*	F
V	*V*	V	V	V	*V*	V	V	V	*V*	V

Donc a→(b→c) ↔ (a∧b)→c, et bien entendu dans le cas où a remplace c, ces deux expressions sont équivalentes, et de plus tautologiques.

VII.B Glossaire

Ce glossaire est construit à partir de celui de l'*Idéographie*[2], mais aussi à partir des versions allemandes et anglaises des *Lois fondamentales* (*Grundgesetze*).

1 Par exemple dans [Gg] I, paragraphe 12, pages 21 et 22, feuilles 52 et 53, et bien entendu en utilisant son symbolisme idéographique. Voir aussi ici page 35.
2 [Ig], préface du traducteur, pages viii et ix.

Allemand	Français	Anglais
Ableitung	dérivation[1]	
Allgemeinheit	généralité	
Andeutung	indication	*indication*
Anschauung	intuition	
Argument	argument	*argument*
Ausdruck	expression	*expression*
Bedeutung	dénotation, référence, signification, « objet » pointé[2]	*denotation*
Bedingheit	conditionnalité	
Begriff	concept	*concept*
Behauptung	assertion	*assertion*
beurteilbar	jugeable	
Bezeichnung	symbole	
Beziehung	relation	*relation*
Bildung	formation[3]	*formation*
Buchstabe	lettre	*letter*
darstellen	représenter	
Darstellung	représentation	
Eigenname	nom propre	*proper name*
Eigenschaft	propriété	*property*
Ergebnis	résultat	
Erklärung	explication, justification	
Folge	conséquence	
Formelspache	langage formulaire	
Funktion	fonction	*function*
Gebiet	portée, domaine	*scope*
Gedanke	pensée	*thought*
Gegenstand	objet	*object*
gesättigt	saturé	*saturated*
Gleichheit	identité, mêmeté	
Gültigkeit	validité	
Höhlung	creux	*concavity*
Inhalt	contenu	
Mark	marque, caractère, signe[4]	*mark*
Prädikat	prédicat	
rechtmässig	correctement	*correctly*
Satz	proposition	*proposition*
Schluss	inférence	
Schlussweise	mode d'inférence	

1 Dans le sens de l'inférence, de la conséquence logique.

2 Cela peut être une fonction, voir [ÉLP], *Qu'est-ce qu'une fonction*, page 167 avec « sin x », où les guillemets sont l'opérateur de signification.

3 Utilisé pour parler des expressions bien (correctement) formées.

4 Je n'ai pas trouvé de traduction satisfaisante pour le moment.

Allemand	Français	Anglais
Sinn	sens	*sense*
Strich	trait	*stroke*
Stufe	niveau	*level*
Subjekt	sujet	
Urteil	jugement	*judgement*
Verfahren	procédure	
Verneinung	négation	
Verschmelzung	amalgamation	*amalgamation*
vertreten[5]	représenter	
Vorstellung	idée	
Wagerechte	horizontal, trait de contenu	*horizontal*
Wahrheitswerth	valeur de vérité	*truth-value*
Wendung	contraposition	*contraposition*
Werth	valeur	*value*
Werthverlauf	parcours de valeur	*course-of-value*
Zeichen	signe	*sign*

5 Voir aussi *darstellen*.